MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Miércoles 10 de Enero

Auxiliar 10: Aplicaciones de la integral

1. Sea f una función que cambia de signo una cantidad finita de veces en $[a, b]$ entonces el área de la función en ese intervalo se calcula como $\int_a^b |f(x)|dx$

2. Sea f una función diferenciable en $[a, b]$ y $(x, f(x))$ la curva que genera su gráfico, entonces la longitud de arco de curva está dada por:
$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

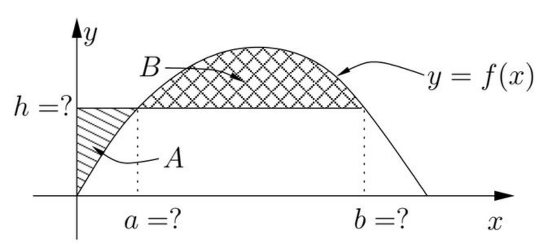
3. Manto de revolución: Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, continua y diferenciable entonces, el área del manto de revolución en torno al eje OX está dado por:
$$A_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

4. Consideremos la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, entonces:
   - El volumen de revolución de R torno al eje OX es $V_{OX} = \pi \int_a^b (f(x))^2dx$.
   - El volumen de revolución de R torno al eje OY es $V_{OY} = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$.

5. Área en coordenadas polares: Sea $\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^+$ una función integrable, con $\beta - \alpha \leq 2\pi$ y que define una curva en coordenadas polares $\rho = \rho(\phi)$, entonces el área de la región $R = \{(\rho\cos(\phi), \rho\operatorname{sen}(\phi)) : \phi \in [\alpha, \beta], \rho \in [0, \rho(\phi)]\}$ está dada por:
$$V = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\rho(\phi))^2d\phi$$

6. Centro de gravedad de una superficie plana: Si consideramos la misma región R anterior, entonces las coordenadas del centro de masas están dadas por:
$$X_G = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \quad Y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

P1. Dada $f(x) = 2x - 3x^2$, determinar la altura de una recta horizontal h para que las áreas de A y B de la figura sean iguales.



Solución: Notemos que $h = f(a)$, por lo que en realidad lo que hay que buscar es el a que cumple la propiedad. Sabemos que para calcular el área entre dos curvas basta integrar la resta de las funciones. En este caso por un lado tenemos la parábola y por el otro la constante $y = f(a)$. Es fácil ver que la parábola tiene sus ceros en $0, \frac{2}{3}$ además como toda parábola es simétrica tenemos que $b = \frac{2}{3} - a$, así lo que buscamos es un a que cumpla que:

$$\int_0^a [f(a) - f(x)]dx = \int_a^{2/3-a} [f(x) - f(a)]dx$$

Reemplazando $f(x)$ e integrando llegamos a que esta igualdad se traduce en: $2a^2 - 3a^3 - a^2 + a^3 = (\frac{2}{3} - a)^2 - (\frac{2}{3} - a)^3 - a^2 + a^3 - \frac{2}{3}(2a - 3a^2) + 2a(2a - 3a^2)$. (Puede ser que haya algún error de matraca de acá en adelante, lo revisaré pero preferí subir la pauta así por si alguien quiere revisarla altiro) Agrupando los términos semejantes se llega a la ecuación $0 = \frac{4}{27} - \frac{4}{3}a + 3a^2$. Cuyo único cero es $a = \frac{2}{9}$. Así concluimos que $h = f(\frac{2}{9}) = \frac{8}{27}$

P2. Considera las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ definidas en $[0, \pi]$.

(I) Pruebe que $g(x) \geq f(x)\ \forall x \in [0, \pi]$
Indicación: Analizar concavidad y con ello deducir el mínimo de la función $h(x) = g(x) - f(x)$.

Solución: Es claro que $h'(x) = \pi - 2x - cos(x)$ y $h''(x) = -2 + sen(x) < 0$ Luego h es estrictamente cóncava, y por lo tanto el mínimo de la función se debe encontrar en uno de los extremos, sino uno se podría parar en el mínimo y crecer tanto hacia la derecha como la izquierda, es decir en ese sector la función sería convexa. Luego basta solo estudiar $g(0) - f(0)$ y $g(\pi) - f(\pi)$ Ambos son 0, por lo tanto la función siempre es positiva y con ello se concluye que $g(x) \geq f(x)\ \forall x \in [0, \pi]$

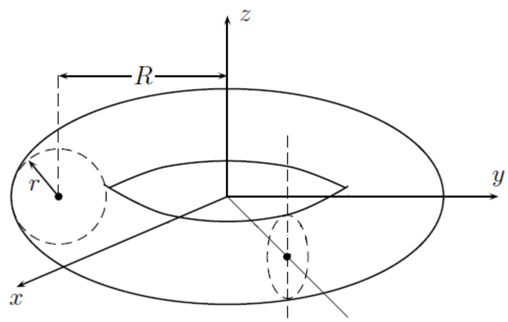
(II) Calcular el área de la región encerrada por g y f.

Solución: Sabemos que el área entre dos curvas está dada por $\int_0^\pi |g(x) - f(x)|dx$, pero por la parte anterior esto es simplemente $\int_0^\pi g(x) - f(x)dx = \int_0^\pi \pi x - x^2 - \sin(x)dx = \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3} + \cos(\pi) - \cos(0) = \frac{\pi^3}{6} - 2$

(III) Calcular el volumen de revolución de la región respecto al eje OY.

Solución: Sabemos que este está dado por $2\pi \int_0^\pi x(g(x) - f(x)) = 2\pi \int_0^\pi \pi x^2 - x^3 - x\sin(x)dx$, las primeras dos son simples de calcular y la tercera se calcula utilizando integración por partes con $u = x \Rightarrow du = dx,\ dv = \sin(x) \Rightarrow v = -cos(x)$. Así llegamos a $2\pi\left[\frac{\pi^4}{12} - \pi + \sin(\pi) - \sin(0)\right] = \frac{\pi^5}{6} - 2\pi^2$

P3. Calcular el área del toro, es decir del cuerpo generado al rotar una circunferencia de radio r y de centro en $(0, R)$ $(R > r)$, en torno al eje OX (como en la figura).



Solución: Es claro que el círculo de centro $(0, R)$ y radio r tiene por ecuación $(y-R)^2+x^2=r^2$. Así nos dividimos en dos curvas $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}+R \Rightarrow y'=\pm\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Llamemos S_1 a la superficie generada por la curva positiva y S_2 a la de la negativa, notemos que el área total está dada por S_1+S_2 ¿Por qué + si era - antes? Porque nosotros queremos el área de todo el manto del toro, esto es toda la que está por afuera más la que esta adentro (para fijar ideas imagínense que en ves de trabajar en un toro estuviésemos en un cilindro hueco, ahí el área de los mantos sería la cáscara de afuera + la de adentro, acá es exactamente lo mismo, así $A_{OX}=2\pi\int_{-r}^{r}\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx+2\pi\int_{-r}^{r}\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx=2\pi\int_{-r}^{r}\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\right)+\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\right)=4\pi R\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=4\pi Rr(arcsen(\frac{r}{r})-arcsen(0)=4\pi^2Rr$

P4. Encuentre la función $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ que cumple que $f(0)=0$ y además el largo de la curva desde 0 hasta cualquier punto x es $x^2+2x-f(x)$.

Solución: queremos que $\int_0^x\sqrt{1+(f'(t))^2}dt=x^2+2x-f(x)$, derivando a ambos lados llegamos a que $\sqrt{1+(f'(x))^2}=2x+2-f'(x)\Rightarrow 1+(f'(x))^2=(2(x+1))^2-4(x+1)f'(x)+(f'(x))^2\Rightarrow f'(x)=(x+1)-\frac{1}{4(x+1)}\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}+x-\frac{\ln(x+1)}{4}+C$, pero $f(0)=0\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}+x-\frac{\ln(x+1)}{4}$