MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Jueves 11 de Enero

Auxiliar 11: Repaso C3

1. longitud de arco de curva:

$$\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

2. $A_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$

3. $V_{OX} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$

4. $V_{OY} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$

5. Área en coordenadas polares: Sea $\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^+$ una función integrable, con $\beta - \alpha \leq 2\pi$ y que define una curva en coordenadas polares $\rho = \rho(\phi)$, entonces el área de la región $R = \{(\rho\cos(\phi), \rho\,\mathrm{sen}(\phi)) : \ \phi \in [\alpha, \beta], \rho \in [0, \rho(\phi)]\}$ está dada por:

$$V = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\rho(\phi))^2 d\phi$$

6. Centro de gravedad de una superficie plana: Si consideramos la misma región R anterior, entonces las coordenadas del centro de masas están dadas por:

$$X_G = \frac{\int_a^b x f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \quad Y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

P1. Se dice que una función es T-periódica si $\forall x \ \ f(x+T) = f(x)$.

a) Demuestre que si f es T-periódica entonces f' también lo es.

b) Encuentre un ejemplo de función no periódica, y cuya derivada si lo sea.

c) Si f es una función T-periódica integrable en $[0, T]$, demuestre que $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$$

Indicación: Separe de dos formas distintas $\int_0^{a+T} f(x)dx$

d) Suponga que f es una función cuya derivada es T-periódica. Demuestre que f es T-periódica si y sólo si $f(0) = f(T)$.

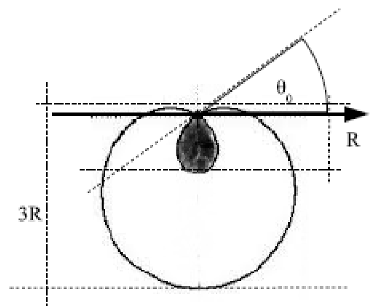
P2. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = 1/2 \\ 0 & x \neq 1/2 \end{cases}$$

Muestre que f es integrable y calcule $\int_0^1 f(x)dx.$

P3. Calcule el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k\cos^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)$

P4. Dada la cardioide $\rho(\theta) = R - 2R\,\text{sen}(\theta)$, $R > 0$, se pide calcular el área de la región achurada (ver figura).
Indicación: Encontrar θ_0 tal que $\rho(\theta_0) = 0$.



P5. De la auxiliar anterior sabemos que si consideramos las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ definidas en $[0, \pi]$, tenemos que:

(I) $g(x) \geq f(x)\ \forall x \in [0, \pi]$

(II) El área de la región encerrada por g y f es $\frac{\pi^3}{6} - 2$.

(III) El volumen de revolución de la región respecto al eje OY es $\frac{\pi^5}{6} - 2\pi^2$.

Utilizando esto calcule la posición del centro de gravedad.

P6. **[Propuesto:**] Sea f una función continua y biyectiva en $[a, b]$, pruebe que:

$$\int_a^b f^{-1}(x)dx = f^{-1}(b)b - f^{-1}(a)a - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)dx$$

Observe los límites a los que se quiere llegar y utilice un cambio de variable adecuado y luego integre por partes.

P7. **[Propuesto:**]Utilizando la parte anterior calcule las siguientes integrales:

(I) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \text{arc sen}(x)dx$ (II) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)dx$ (III) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)dx$