MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Jueves 18 de Enero

Auxiliar 12: Integrales impropias y series

1. **Criterio de Comparación**
   Para dos funciones continuas en $[a, \infty)$, si $\exists b \geq a$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \geq b$, se tiene que:
   $$\int_a^\infty g < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f < \infty$$
   También es cierto que
   $$\int_a^c g < \infty \Rightarrow \int_a^c f < \infty$$
   En caso de que la función no sea acotada en $[a, c]$
2. **Criterio del Cuociente**
   Si dos funciones son no negativas a partir de un punto y $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$, entonces las integrales $\int_a^\infty f$ y $\int_a^\infty g$ divergen o convergen al mismo tiempo.
3. $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$. Converge si $\alpha < 1$.
4. **Convergencia Absoluta**
   La integral de una función es abs. convergente si la integral de su módulo es convergente.
   Además, toda integral absolutamente convergente es además convergente.
5. **Convergencia**
   Para una sucesión $(a_n)_n$ se define la sucesión de sumas parciales como $(s_n)_n = \sum_{k\leq n} a_n$ La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si la sucesión $(s_n)_n$ tiene un límite.
   Obs: Si $\sum a_n$ converge, entonces $a_n \to 0$
6. **Mayoración de series:** Análogo a 1.
7. **Criterio del cuociente y la raiz n-esima**
   Si $a_n > 0$ y $\lim a_{n+1}/a_n = L_c$ o $\limsup a_n^{1/n} = L_r$ existen, se tiene que:
   - Si $L_c < 1$ o $L_r < 1$, la serie converge.
   - Si $L_c > 1$ o $L_r > 1$, la serie diverge.
   - Si $L_c = 1$ o $L_r = 1$ los criterios no son concluyentes.
8. **Criterio de la integral**
   Si $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ es una función decreciente, entonces $\sum f(n) < \infty \Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)dx < \infty$.
9. **Criterio de Leibnitz**
   Si (a_n) es decreciente y tiende a cero, entonces $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.
10. **Reordenamientos:**
    Si a_n es no negativa y $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge entonces todo reordenamiento b_n de a_n cumple que $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ es convergente

P1. Determine si las siguientes integrales impropias, son o no convergentes:

(I) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^x dx$ (II) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})}$

P2. Para una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua, definimos la función **Transformada de Laplace**:
$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

a) Se dice que una función es de orden exponencial si $\exists\ M > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\forall t \in [0, \infty),\ |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. Suponiendo que f es de orden exponencial, pruebe que la integral definida anteriormente es convergente $\forall s > \alpha$.

b) **[Propuesto:**] Muestre que si f' es de orden exponencial, entonces f también lo es, para otras constantes adecuadas.
Indicación: Utilice TFC, desigualdad triangular y puede asumir que $\forall c > 0,\ \alpha > 0\ \exists \overline{M}$ tal que $c + e^{\alpha x} \leq \overline{M} e^{\alpha x}$.

c) Supongamos que f es de clase $\mathcal{C}^2$ y que la segunda derivada es de orden exponencial. Argumente por qué existe la transformada de f y calcúlela en términos de la transformada de f.

d) Argumente por que existen y calcule:

I. **[Propuesto:**]$\mathcal{L}[1](s)$
II. **[Propuesto:**] $\mathcal{L}[e^{at}](s)$
III. $\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s)$
IV. $\mathcal{L}[\mathrm{sen}(\omega t)](s)$

P3. Sean a_n y b_n dos sucesiones no negativas, demuestre o de un contraejemplo:

I) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n + b_n$ convergente $\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ convergen por separado
II) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n - b_n$ convergente $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ convergen por separado.
III) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)} < \infty$
IV) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ son convergentes entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} \max\{a_n, b_n\}$ es convergente.

P4. Determine para qué valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{n\alpha}}$$

P5. Calcule la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln(\frac{n^2}{n^2-1})$.

P6. **[Propuesto:**] Sean (a_n) y (b_n) sucesiones tales que $e^{a_n} = a_n + e^{b_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Utilizando una desigualdad de la exponencial, Verifique que si $a_n > 0$ entonces $b_n > 0$.
(b) Demuestre que

$$\sum_{n\geq 0} a_n < \infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{a_n} < \infty$$

P7. **[Propuesto:**] Estudie la convergencia de la siguiente integral y calcule (si corresponde)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{sen}(x)dx.$$

Compare con lo obtenido en la P2.d)