MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Jueves 18 de Enero

Sketch of proof Auxiliar 12: Integrales impropias y series

P1. Determine si las siguientes integrales impropias, son o no convergentes:

(I) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^x dx$

Sol: como $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \to \exists x_0 \forall x \geq x_0 (\frac{\ln(x)}{x})^x \geq e^{-x}$ la cual es convergente. Por teorema se concluye que es convergente.

(II) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})}$

Sol: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})} = \int_0^1 \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})}$, y $x \in [0,1] \Rightarrow \sqrt{x} \geq x \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})} \geq \int_0^1 \frac{dx}{2x^{\frac{3}{2}}}$, la cual diverge. Se concluye que es divergente.

P2. Para una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua, definimos la función **Transformada de Laplace**:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

a) Se dice que una función es de orden exponencial si $\exists\ M > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\forall t \in [0, \infty),\ |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. Suponiendo que f es de orden exponencial, pruebe que la integral definida anteriormente es convergente $\forall s > \alpha$.

Sol: $|e^{-st} f(t)| \leq Me^{-(s-\alpha)}t$, integrando se concluye que es absolutamente convergente.

b) **[Propuesto:**] Muestre que si f' es de orden exponencial, entonces f también lo es, para otras constantes adecuadas.
Indicación: Utilice TFC, desigualdad triangular y puede asumir que $\forall c > 0,\ \alpha > 0\ \exists \overline{M}$ tal que $c + e^{\alpha x} \leq \overline{M} e^{\alpha x}$
Sol: $|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt \leq |f(0)| + \frac{Me^{\alpha x}}{|\alpha|} - \frac{M}{|\alpha|} \leq \overline{M} e^{\alpha x}$

c) Supongamos que f es de clase $\mathcal{C}^2$ y que la segunda derivada es de orden exponencial. Argumente por qué existe la transformada de f y calcúlela en términos de la transformada de f.

Sol: por las partes anteriores f' es de orden exp y por lo tanto f. Luego calculamos $\mathcal{L}[f'](s)$ utilizando integración por partes $u = e^{-st}$ $du = -se^{-st} dt$ $dv = f'(t)st$ $v = f(t)$
$\mathcal{L}[f'](s) = -f(0) + s\mathcal{L}[f](s) \Rightarrow \mathcal{L}[f''](s) = s^2 \mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)$

d) Argumente por que existen y calcule:

I. **[Propuesto:**]$\mathcal{L}[1](s)$
II. **[Propuesto:**] $\mathcal{L}[e^{at}](s)$

III. $\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s)$
Sol: Parte anterior + $\cos'' = -\cos + \mathcal{L}[-f](s) = -\mathcal{L}[f](s) \Rightarrow \mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s^2}{s^2+\omega^2}$ (También se puede hacer integrando por partes dos veces).

IV. $\mathcal{L}[\text{sen}(\omega t)](s)$
Sol: Utilizando lo anterior y la transformada de la derivada $\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

P3. Sean a_n y b_n dos sucesiones no negativas, demuestre o de un contraejemplo:

I) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n + b_n$ convergente $\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ convergen por separado
Sol: Verdadero
$\Rightarrow$: $a_n \leq a_n + b_n$
$\Leftarrow$: Escribimos la serie como límite y utilizamos álgebra de límites convergentes y propiedades de las sumatorias de siempre.

II) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n - b_n$ convergente $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ convergen por separado.
Sol: Falso, tomar $a_n = b_n = 1 \forall n$

III) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)} < \infty$
Sol: Verdadero
Tomamos $b_n = a_{\varphi(n)}$ solo que llenamos con 0 todos los espacios entre medio, es directo que $b_n \leq a_n$.

IV) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ son convergentes entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} \text{máx}\{a_n, b_n\}$ es convergente.
Sol: Verdadero
$\sum_{n\in\mathbb{N}} \text{máx}\{a_n, b_n\} = \sum_{n\in\mathbb{N}: a_n \leq b_n} b_n + \sum_{n\in\mathbb{N}: b_n < a_n} a_n$, por I, III se concluye.

P4. Determine para qué valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{n\alpha}}$$

Sol: $\text{lím sup}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\frac{1}{2}-\alpha)}}{((1+\frac{1}{n})^n)^\alpha}$, $\alpha < \frac{1}{2}$ el límite diverge y por lo tanto la serie, sino converge a un número menor que 1 por lo tanto la serie converge.

P5. Calcule la serie $\sum_{n\geq 2} \ln(\frac{n^2}{n^2-1})$.

$$\sum_{n\geq 2} \ln(\frac{n^2}{n^2-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} [\ln(i) - \ln(i+1)] + [\ln(i) - \ln(i-1)] = \ln(2)$$

P6. **[Propuesto:**] Sean (a_n) y (b_n) sucesiones tales que $e^{a_n} = a_n + e^{b_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Utilizando una desigualdad de la exponencial, Verifique que si $a_n > 0$ entonces $b_n > 0$.

(b) Demuestre que

$$\sum_{n\geq 0} a_n < \infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{a_n} < \infty$$

P7. [Propuesto:] Estudie la convergencia de la siguiente integral y calcule (si corresponde)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen}(x) dx.$$

Compare con lo obtenido en la P2.d)