MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Martes 23 de Enero

Sketch of proof Auxiliar 13: Preparación examen

La última :'(

(**P**1) Encuentre radio e intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

(I) **[Propuesto:**] $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

(II) **[Propuesto:**] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$.

(III) **[Propuesto:**] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{3/2}} x^n$.

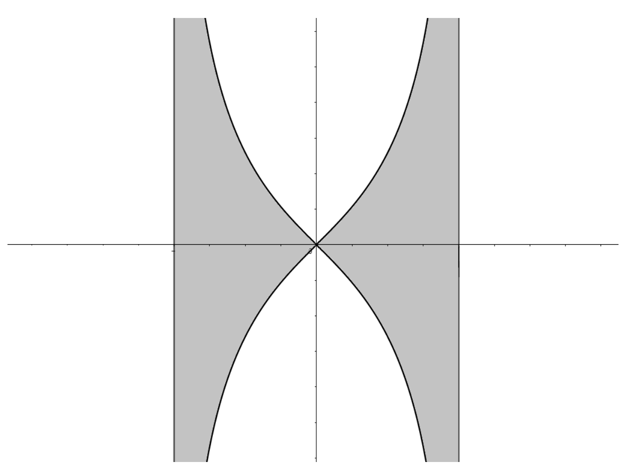
(IV) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2})(x-1)^n$, con $0 < a < b$.

Sol: $b\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq b\sqrt[n]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$ Luego $R = \frac{1}{b}$. Para lo extremos estudiar $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n}$ y recordar que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ converge ssi $\int_0^{\infty} f(x)dx$ converge. Concluir que $I = [1 - \frac{1}{b}, 1 + \frac{1}{b}]$

(V) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(3 + (-1)^n)^n}$.

Sol: $\limsup frac1(3 + (-1)^n)^n = \frac{1}{2}$ Pero al reemplazar en ± 2 queda $\sum_{n\in\mathbb{N}:nespar} \frac{(\pm 2)^n}{4^n} \pm \sum_{n\in\mathbb{N}:nesimpar} 1$ en ambos casos tenemos convergente $\pm$ divergente por lo tanto $I = (-2, 2)$

(**P**2) Considere la región encerrada entre la curva $(a^2 - x^2)y^2 = x^2(a^2 + x^2)$ y sus asíntotas, como se muestra en la figura



Demuestre que el área de la región (la parte sombreada) es finita.

Sol: El área se calcula como $4\int_0^a \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$ notando que $\frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} \leq \frac{x\sqrt{a^2+a^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$ y que $\int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a$ (utilizar c.v $u = a^2 - x^2$) se concluye.

(**P**3) El desarrollo en serie para cierta función f es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}.$$

(I) Encuentre el radio e intervalo de convergencia de la serie.
Sol: $\lim \sqrt{n}\frac{2^n}{n} = 2$. Al evaluar en 2 queda la serie armónica la cual diverge, en cambio al utilizar -2 si converge (Criterio de Leibnitz) así $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(II) Determine la serie que representa, $f'(x)$, y preséntela con una función conocida.
Sol: Metiendo al derivada dentro de la serie y utilizando un cambio de índice concluimos que $f'(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = \frac{2}{1-2x}$ (suma geométrica)

(III) Determine $f(x)$.
Sol: Integrando, $f(x) = -\ln(1-2x) + C$ pero $f(0) = 0$ por lo tanto $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = -\ln(1-2x)$

(IV) Utilice lo anterior para calcular el valor de la serie numérica

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Sol: $f(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$

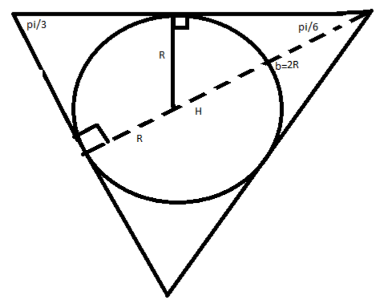
(**P**4) Considere un cono de altura H cuyo ángulo entre una pared y el eje es $\pi/6$, que está relleno de agua. El objetivo del problema será encontrar el mayor radio de una esfera que al ser sumergida hasta el fondo desplace la mayor cantidad de agua fuera del cono.

a) Sea $x_0 \in [-R, R]$. Demuestre que el volumen obtenido al rotar la región $A = \{(x,y) \ : \ x_0 \leq x \leq R,\ 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$ en torno al eje X es $\dfrac{\pi}{3}(R - x_0)(2R^2 - Rx_0 - x_0^2)$
Sol: Calculamos $pi\int_{x_0}^{R}(\sqrt{R^2 - x_0^2}^2)$ y recordamos que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

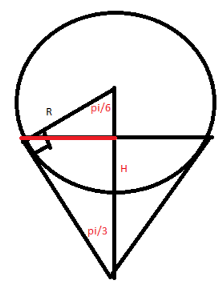
b) Muestre que el volumen de fluido desplazado está dado por:

$$V(R) = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3}R^3 & R < \frac{H}{3} \\ \dfrac{\pi}{3}(H-R)^2(4R - H) & \frac{H}{3} \leq R \leq \frac{2H}{3} \end{cases}$$

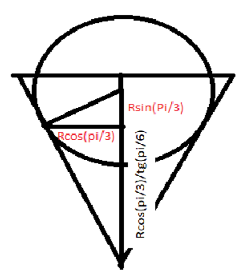
Sol: Primer caso que la esfera sea lo suficientemente chica que quepa entera, en este caso el límite es que la esfera quede justo inscrita en el cono, si dibujamos esto en un plano obtenemos la siguiente figura



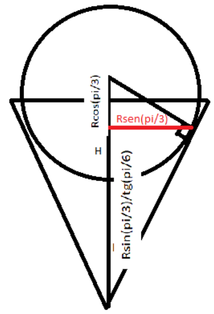
Se puede ver que $\sin(\frac{\pi}{6}) = R/b$ y que $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{H}{R+b}$ de donde se concluye ese caso.
Para el segundo caso vamos moviendo el círculo anterior y agrandandolo hasta que toque justo en los vertices del triángulo así, llegamos a lo siguiente:



Notemos que la linea roja se puede calcular de dos formas $H\sin(\frac{\pi}{6}) = R\sin(\frac{|pi}{3})$ y deducimos que el caso límite es $R = \frac{2H}{3}$. Ahora de la parte anterior conocemos el volumen solo necesitamos escribir x_0 en función de R y H. Notemos que cuando estamos entre $\frac{H}{3}$ y $\frac{2H}{3}$ tenemos



Así $H + x_0 = \frac{R\cos(\frac{\pi}{3})}{\tan(\frac{\pi}{6})}$ y reemplazando en $a)$ se concluye. Por otro lado cuando el centro del circulo está fuera del triangulo tenemos



De donde $\frac{R\sin(\frac{\pi}{3})}{\tan(\frac{\pi}{6})} + R\cos(\frac{\pi}{3}) = H + x_0$ también despejamos ingresamos en a) y concluimos

c) Encuentre el máximo de la función V en $[0, 2H/3]$, justificando por qué es el máximo.