Pauta Aux 14

1) Vamos a sacar la ecuación de Torque.

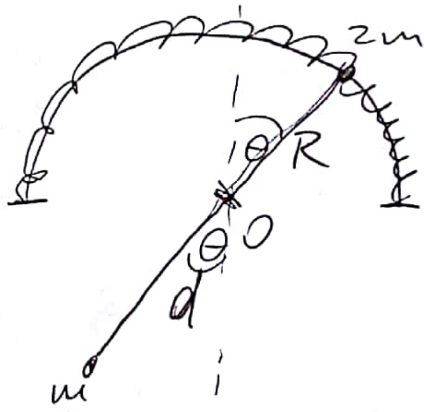
¿Por qué torque y no fuerza?

Porque buscamos una ecuación para θ (EDO), por eso el problema "natural" a resolver es el de torques.

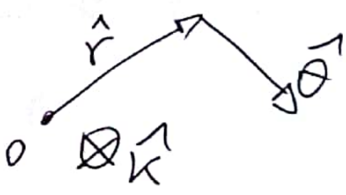
$$\vec{\tau} = \sum \vec{r} \times \vec{F} \quad \wedge \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

Para $\vec{l} = \sum \vec{l}_i$

y $\vec{l}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$



$$\Rightarrow \vec{l} = 2mR\hat{r} \times (R\dot{\theta}\hat{\theta})$$
$$+ m d\hat{r} \times (d\dot{\theta}\hat{\theta})$$
$$= m\dot{\theta}(2R^2 + d^2)\hat{k}$$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = m(2R^2 + d^2)\ddot{\theta}\hat{k}}$$

Ahora falta sacar $\sum \vec{r} \times \vec{F}$

las fuerzas que hay son:

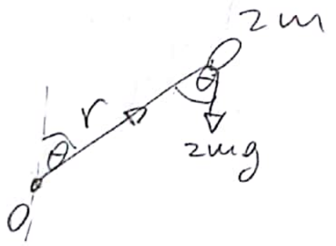
- 2 elasticas // 2 de gravedad // Normal

la Normal es paralela a la posicion (en este caso?), por lo que no produce torque

↳ Si el riel por el que se mueve la masa 2m fuera eliptico, el torque no seria nulo.

<u>gravedad</u> /

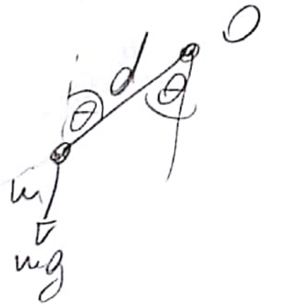
Para la masa 2m



Como solo nos importa la parte perpendicular (por el producto cruz)

$$\Rightarrow \vec{r} \times \vec{F}_g = R(2mg)\,\text{sen}\,\theta\,\hat{k}$$

Para la masa m



$$\vec{r} \times \vec{F}_G = -d\,mg\,\text{sen}\,\theta\,\hat{k}$$

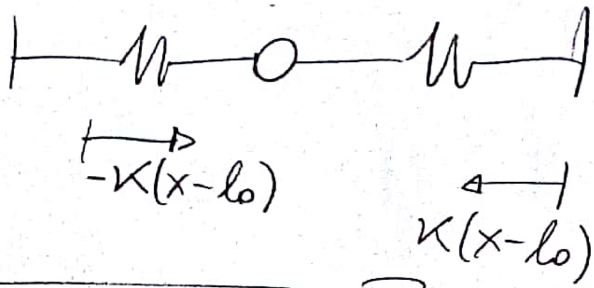
⇒ la parte de la gravedad es

$$\vec{r} \times \vec{F} = mg\,\text{sen}\,\theta(2R-d)\hat{k}$$

elastica:

Por el dibujo uno intuye que las fuerzas de los resortes van en sentidos opuestos

↳ Es analogo a :



Asi (sabiendo que la longitud del arco es $R\alpha$)

$$\Rightarrow F_e^{①} = -K\left(\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)R - l_0\right) \leftarrow \text{Elastico derecha}$$

$$F_e^{②} = K\left(\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)R - l_0\right) \leftarrow \text{Elastico izquierda}$$

Como ambos son para una misma masa

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_e^{①}}_{\text{Es el mismo}} + \vec{r} \times \vec{F}_e^{②} = \vec{r} \times \underbrace{\left(\vec{F}_e^{①} + \vec{F}_e^{②}\right)}_{-2K\theta R\hat{\theta}} \quad \Big\| \quad \vec{r} = R\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{r} \times \vec{F}_e = -2K\theta R^2 \hat{k}$$

Ahora haciendo $\vec{\tau} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$

$$\Rightarrow m(2R^2+d^2)\ddot{\theta} = mg \operatorname{sen}\theta (2R-d) - 2KR^2\theta$$

En los pts de equilibrio $\ddot{\theta} = 0 = \dot{\theta}$

$$\Rightarrow mg(2R-d)\operatorname{sen}\theta = 2KR^2\theta$$

Aca $K = \dfrac{\sqrt{2}\, mg(2R-d)}{\pi R^2}$

$$\Rightarrow \cancel{mg(2R-d)}\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}\,\cancel{mg(2R-d)}}{\pi \cancel{R^2}}\cancel{R^2}\,\theta$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\theta$$ [¿Que hacemos ahora? ... la intuicion xD!]

Notar que ese K es rebuscado, asi que seguramente esta ecuacion tiene soluciones claras

Por adivinanza (obviando la solucion $\theta = 0$)

$\theta = \pi\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{\cancel{\pi}} \cdot \cancel{\pi}\alpha \rightarrow$ Pensando en $\alpha = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} = \pi \cdot \alpha$ ✓✓

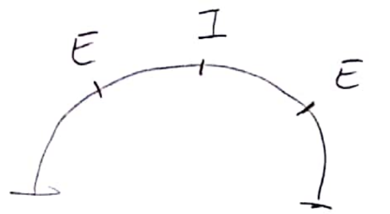
(!) El saber la solucion de este tipo de ecuacion fue por ojo solamente, ~~[illegible]~~

↳ El fruto de horas y horas de matraca, asi que si no les sale no se bajoneen

Así $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$ es solucion, ademas sabemos que $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$

$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$ tambien es solucion

↳ Tiene sentido con lo que vimos en clase



⇝ Esa fue nuestra adivinanza

Para $\theta \approx 0 \Rightarrow \theta = \varepsilon$

$$\Rightarrow m(2R^2+d^2)\ddot{\theta} = mg(2R-d)\left(\text{sen}\theta - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\theta\right)$$

$$\approx (2R^2+d^2)\ddot{\varepsilon} = g(2R-d)\left(\varepsilon - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \underbrace{\frac{g(2R-d)}{2R^2+d^2}}_{\text{mayor a } 0}\underbrace{\left(-1+\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)}_{\text{mayor o menor?}}\varepsilon = 0$$

como $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} < \pi \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\pi} < 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - 1 < 0$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} - \Omega^2\varepsilon = 0; \text{ con } \Omega^2 = \frac{g(2R-d)}{2R^2+d^2}\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)$$

↳ $\theta = 0$ es un pto inestable con frecuencia caracteristica Ω

· Para $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + \varepsilon$

$$\Rightarrow (2R^2 + d^2)\ddot{\varepsilon} = g(2R-d)\underbrace{\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right) - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\right)}_{\square}$$

$$\square) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\overbrace{\cos\varepsilon}^{\approx 1} + \underbrace{\operatorname{sen}\varepsilon}_{\approx \varepsilon}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right) - 2\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\varepsilon) - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \square = \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon\left(1-\frac{4}{\pi}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon\underbrace{\left(\frac{4}{\pi}-1\right)}_{>0}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} = -\underbrace{\frac{g(2R-d)}{2R^2+d^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{4}{\pi}-1\right)}_{\omega^2}\varepsilon \Rightarrow \underbrace{\ddot{\varepsilon} + \omega^2\varepsilon = 0}$$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ es un equilibrio estable con frecuencia ω

Como el sistema es simétrico, la frecuencia para $\theta = -\frac{\pi}{4}$ debe ser la misma.

Scanned by CamScanner