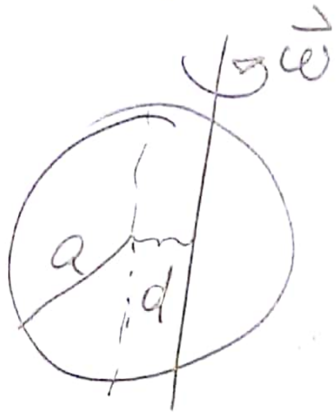
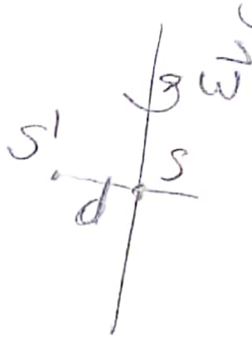
$\boxed{\text{P1 Aux 20}}$

El S es el sistema cilíndrico que va en el eje $\vec{\omega}$



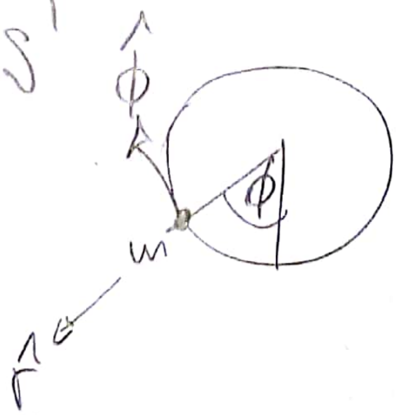


Ademas veremos el cilíndrico dentro del aro

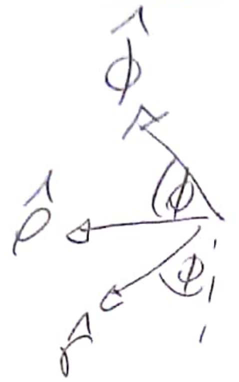
Como solo veremos la dinámica, nos importa ver el $\vec{R}$ y $\vec{\Omega}$

en el sistema S ; $\vec{R} = d\hat{\rho}$; $\vec{\Omega} = \omega\hat{k}$

en el sistema S'



$\Rightarrow$



$\Rightarrow \hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{\phi} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{r}$

$\Rightarrow \vec{R} = d\hat{\rho}$ ✓✓ (en sistema S')

$\vec{\Omega} = \omega\hat{k}$

Cuanto vale $\hat{k}$ en S'??

$\Rightarrow \hat{k} = -\cos\phi\,\hat{r} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi}$

Ahora con $\vec{R}$ y $\vec{\Omega}$ descritos en el sistema S'

y como $\ddot{\vec{R}} = -d\omega^2\hat{\rho}$ ← aceleracion centripeta

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')$$

$$- m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$$

como $\dot{\vec{\Omega}} = 0$ ✓✓

$$\vec{\Omega}\times\vec{r}' = \omega a(\text{sen}\,\phi\,\hat{\phi} - \cos\phi\,\hat{r})\times\hat{r}$$

$$= -\omega a\,\text{sen}\,\phi\,\hat{z}$$

$$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = -\omega^2 a\,\text{sen}\,\phi\,\underbrace{(\text{sen}\,\phi\,\hat{\phi} - \cos\phi\,\hat{r})\times\hat{z}}_{\text{sen}\,\phi\,\hat{r} + \cos\phi\,\hat{\phi}}$$

$$\Rightarrow -\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = \omega^2 a\,\text{sen}\,\phi(\text{sen}\,\phi\,\hat{r} + \cos\phi\,\hat{\phi})$$ ✓

$$\vec{\Omega}\times\vec{v}' = \omega(\text{sen}\,\phi\,\hat{\phi} - \cos\phi\,\hat{r})\times a\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$= -\omega a\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow -\vec{\Omega}\times\vec{v}' = \omega a\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{z}$$

$$-\ddot{\vec{R}} = d\omega^2(\cos\phi\,\hat{\phi} + \text{sen}\,\phi\,\hat{r})$$

Ahora deberíamos descomponer las fuerzas en los vectores de S', pero como buscamos la dinámica de ϕ => Solo buscaremos las fuerzas en $\hat{\phi}$

$\Rightarrow F_\phi = 0$ ← No hay gravedad

$\Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{1}{a}\frac{d}{dt}(a^2\dot{\phi})}_{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi})} = d\omega^2\cos\phi + \omega^2 a \,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi$$

Si hay pto de eq. $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$

$\Rightarrow 0 = \cos\phi(d\omega^2 + \omega^2 a\,\mathrm{sen}\,\phi)$

$\Rightarrow \phi = \pi/2$; $\phi = -\pi/2$; $\mathrm{sen}\,\phi = -\frac{d}{a}$

Las 4 soluciones

$\phi = \mathrm{arcsen}\left(-\frac{d}{a}\right)$

$\phi = \pi - \mathrm{arcsen}\left(\frac{-d}{a}\right)$

Para ϕ_0 tal que $\operatorname{sen}\phi_0 = -\frac{d}{a}$

Para $\phi = \phi_0 + \varepsilon$

$\Rightarrow a\ddot{\varepsilon} = d\omega^2 \cos(\phi_0+\varepsilon) + \omega^2 a \operatorname{sen}(\phi_0+\varepsilon)\cos(\phi_0+\varepsilon)$

$$\cos(\phi_0+\varepsilon) = \cos\phi_0 \cos\varepsilon - \operatorname{sen}\phi_0 \operatorname{sen}\varepsilon$$
$$= \cos\phi_0 + \frac{d}{a}\varepsilon$$

$$\operatorname{sen}(\phi_0+\varepsilon) = \underbrace{\operatorname{sen}\phi_0 \cos\varepsilon}_{-\frac{d}{a}} + \underbrace{\cos\phi_0 \operatorname{sen}\varepsilon}_{+\varepsilon\sqrt{1-\frac{d^2}{a^2}}}$$

$\Rightarrow a\ddot{\varepsilon} = d\omega^2\left(\cos\phi_0 + \frac{d}{a}\varepsilon\right) + \omega^2 a\left(\cos\phi_0 + \frac{d}{a}\varepsilon\right)\left(-\frac{d}{a} + \varepsilon\cos\phi_0\right)$

$\Rightarrow a\ddot{\varepsilon} = \left(\cos\phi_0 + \frac{d}{a}\varepsilon\right)\left(\cancel{d\omega^2} - \cancel{\omega^2 d} - \varepsilon\omega^2 a\cos\phi_0\right)$

$\Rightarrow a\ddot{\varepsilon} = -\varepsilon\omega^2 a\cos^2\phi_0$

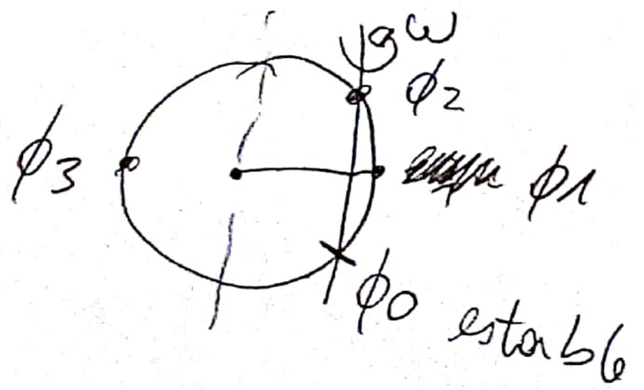
$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} = -\omega^2\left(1-\frac{d^2}{a^2}\right)\varepsilon$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \omega^2\left(1-\frac{d^2}{a^2}\right)\varepsilon = 0$$

Como $d<a \Rightarrow$ es equilibrio estable

$\Rightarrow \phi = \arcsen\left(-\frac{d}{a}\right)$ es un equilibrio estable

Como entre 2 estable hay un inestable



ϕ_2 debe ser estable y ϕ_3 con ϕ_1 debe ser inestable