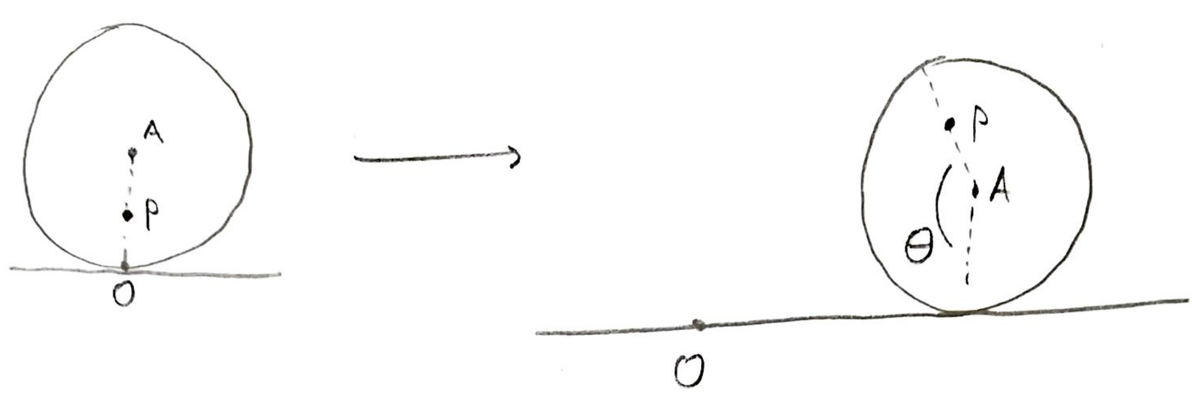
P1



La posición del punto P, tomando el origen O es

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + (\vec{r}_P \cdot \vec{r}_A) \longrightarrow \vec{r}_A = r_0 \theta \, \hat{x} + r_0 \, \hat{y}$$

$$\vec{r}_P - \vec{r}_A = -r \sin\theta \, \hat{x} - r\cos\theta \, \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_P = [r_0 \theta - r\sin\theta] \, \hat{x} + [r_0 - r\cos\theta] \, \hat{y}$$

La curva descrita por P es una cicloide

P2 El punto más bajo de la curva tiene $\theta = \pi$

Si suelto una partícula desde θ_1, al ubicarse en θ habrá caído $\Delta h = y(\theta) - y(\theta_1) = r(\cos\theta_1 - \cos\theta)$. Su velocidad será

$$v = \sqrt{2gr(\cos\theta_1 - \cos\theta)} = 2\sqrt{gr\left(\cos^2 \theta_1/2 - \cos^2 \theta/2\right)}$$

El tiempo que demora en llegar al punto más bajo es

$$T = \int \frac{ds}{v}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left[\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right] d\theta^2 = \left[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right] r^2 d\theta^2$$

$$= \underbrace{\left[1 - \cos\theta\right]}_{2\sin^2\frac{\theta}{2}} 2r^2 d\theta^2 = \left(2\sin\frac{\theta}{2} \, r \, d\theta\right)^2$$

$$T=\int_{\theta_1}^{\pi}\sqrt{\frac{r}{g}}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos^2\frac{\theta_1}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}}\,d\theta$$

Cambio variable $\quad x=\cos\theta/2 \qquad c^2\equiv\cos^2\frac{\theta_1}{2}$

$\qquad dx=-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$

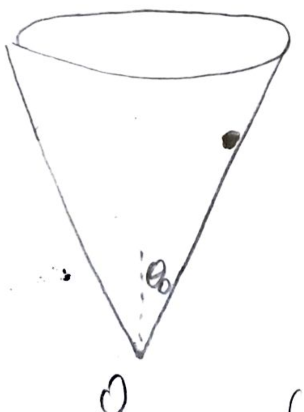
$$T=-\frac{2}{c}\sqrt{\frac{r}{g}}\int_{\cos\theta_1/2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{c}\right)^2}}=-\frac{2}{c}\sqrt{\frac{r}{g}}\left[c\sin^{-1}\left(\frac{x}{c}\right)\right]\Bigg|_{\cos\theta_1/2}^{0}$$

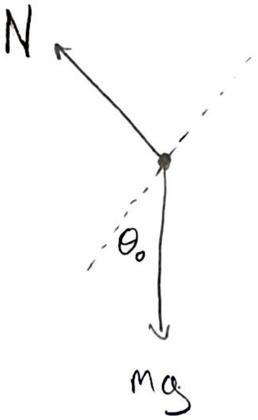
$$T=2\sqrt{\frac{r}{g}}\sin^{-1}\left(\frac{\cos\theta_1/2}{\cos\theta_1/2}\right)=2\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

Encontramos que el tiempo que demora la partícula en llegar al punto más bajo no depende de su punto inicial.

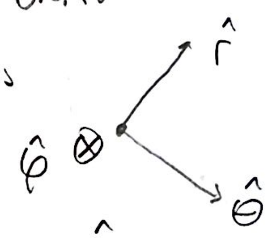
↳ Propiedad tautócrona

P3 DCL

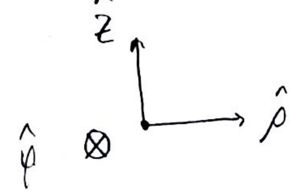




vectores unitarios esféricas



cilíndricas



Ecuación de movimiento

esféricas: $(\ddot{r}-r\dot{\phi}^2\sin^2\theta_0)m=-mg\cos\theta_0 \qquad (\hat{r})$

$-r\dot{\phi}^2\sin\theta_0\cos\theta_0\, m=mg\sin\theta_0-N \qquad (\hat{\theta})$

$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta_0\right)m=0 \qquad (\hat{\varphi})$

en cilíndricas
$$(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)m = -N\cos\theta_0 \qquad (\hat{\rho})$$
$$(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})m = 0 \qquad (\hat{\phi})$$
$$\ddot{z}\cdot m = N\sin\theta_0 - mg \qquad (\hat{z})$$

En general los conos son más fáciles de resolver en coord esféricas porque θ es constante

de $(\hat{\phi})$: $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta_0) = 0$

$$\Rightarrow r^2\dot{\phi}\sin^2\theta_0 = Cte \quad \forall t$$

Obtenemos una constante del movimiento (cantidad conservada)
Conservación del momentum angular.
Podemos obtener una función $\dot{\phi}(r) = \frac{Cte}{r^2\sin^2\theta_0}$

Reemplazando en $(\hat{r})$: $m\ddot{r} - \frac{Cte^2}{r^3\sin^2\theta_0}m = -mg\cos\theta_0$

Obtenemos una EDO que permitiría encontrar una función $r(t)$

De $(\hat{\theta})$ podemos despejar la normal

$$N = mg\sin\theta_0 + \frac{Cte^2}{r^3(t)\sin^2\theta_0}\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}m$$