P21 Auxiliar 7

(a)

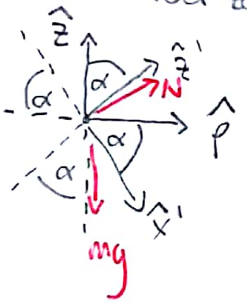
$$m\vec{a}' = \vec{F}_{inerciales} - m\ddot{\vec{R}} - 2m(\vec{\Omega}\times\vec{v}') - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$$

1) En el SRNI la aceleración está dada por:

$$\boxed{\vec{a}' = \ddot{x}'\hat{x}' + \ddot{y}'\hat{y}'} \quad (1)$$ → Por enunciado hay que usar cartesianas!

↳ $\ddot{z}' = 0$ porque por enunciado la partícula no se despega de la cuña.

2) Las fuerzas inerciales son:



$$\boxed{\vec{F} = (N - mg\cos\alpha)\hat{z}' + mg\sin\alpha\,\hat{x}} \quad (2)$$

3) La aceleración de S' según S y la rotación de los ejes coordenadas es:

$\vec{R} = L\hat{\rho}$ $\qquad\qquad$ $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$

$\dot{\vec{R}} = L\Omega\hat{\phi}$

$\ddot{\vec{R}} = -L\Omega^2\hat{\rho}$

(*) L es una distancia que me dí y se me olvido poner en el enunciado.

- Los vectores unitarios de S, en función de los vectores unitarios de S' son:

$\hat{\rho} = \cos\alpha\,\hat{x}' + \sin\alpha\,\hat{z}'$; $\hat{\phi} = \hat{y}'$; $\hat{z} = \cos\alpha\,\hat{z}' - \sin\alpha\,\hat{x}'$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{R}} = -L\Omega^2\left(\cos\alpha\,\hat{x}' + \sin\alpha\,\hat{z}'\right)} \quad (3) \quad ; \quad \boxed{\vec{\Omega} = \Omega\left(\cos\alpha\,\hat{z}' - \sin\alpha\,\hat{x}'\right)} \quad (4)$$

4) La fuerza de Coriolis es:

$$-2m\left(\vec{\Omega}\times\vec{v}'\right) = -2m\left(\Omega\cos\alpha\,\hat{z}' - \Omega\sin\alpha\,\hat{x}'\right)\times\left(\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}'\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{-2m\left(\vec{\Omega}\times\vec{v}'\right) = -2m\Omega\left(-\dot{y}'\cos\alpha\,\hat{x}' + \dot{x}'\cos\alpha\,\hat{y}' - \dot{y}'\sin\alpha\,\hat{z}'\right)} \quad (5)$$

5) Fuerza Centrifuga:

$$-m\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}'\right) = +m\Omega^2\left(\cos\alpha\,\hat{z}' - \sin\alpha\,\hat{x}'\right)\times\left(y'\cos\alpha\,\hat{x}' + x'\cos\alpha\,\hat{y}' - y'\sin\alpha\,\hat{z}'\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{-m\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}'\right) = m\Omega^2\left[-x'\cos^2\alpha\,\hat{x}' + \left(y'\cos^2\alpha - y'\sin^2\alpha\right)\hat{y}' - x'\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{z}'\right]} \quad (6)$$

6) Fuerza Transversal:

$$-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = -m\,0\times\left(x'\hat{x}' + y'\hat{y}'\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = 0} \quad (7)$$

Juntando todas las partes para armar las ecuaciones de movimiento:

$$\hat{x}' \mid \; m\ddot{x}' = mg\sin\alpha + mL\Omega^2\cos\alpha + 2m\Omega\cos\alpha\,\dot{y}' - m\Omega^2\cos^2\alpha\,x'$$

$$\hat{y}' \mid \; m\ddot{y}' = -2m\Omega\cos\alpha\,\dot{x}' + m\Omega^2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)y'$$

$$\hat{z}' \mid \; 0 = N - mg\cos\alpha + mL\Omega^2\sin\alpha + 2m\Omega\sin\alpha\,\dot{y}' - m\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha\,x'$$

(b)

- Si $\Omega \ll 1$, hay que hacer 0 los términos Ω^n con $n>1$.

$\underline{\hat{x}'}\,|\; m\ddot{x}' = mg\sin\alpha + 2m\Omega\cos\alpha\,\dot{y}'$ (1)

$\underline{\hat{y}'}\,|\; m\ddot{y}' = -2m\Omega\cos\alpha\,\dot{x}'$ (2)

$\underline{\hat{z}'}\,|\; N = mg\cos\alpha + 2m\sin\alpha\,\dot{y}'\,\Omega$

- Para resolver este sistema de ecuaciones, hay que calcular la derivada de (1) y (2):

$\cancel{m}\,\dddot{x}' = 2\cancel{m}\Omega\cos\alpha\,\ddot{y}'$ (3)

$\cancel{m}\,\dddot{y}' = -2\cancel{m}\Omega\cos\alpha\,\ddot{x}'$ (4)

- Reemplazando (1) y (2) en (3) y (4):

$$\Rightarrow \begin{cases} \dddot{x}' = -(2\Omega\cos\alpha)^2\,\dot{x}' \\ \dddot{y}' = -2\Omega g\sin\alpha\cos\alpha - (2\Omega\cos\alpha)^2\,\dot{y}' \end{cases}$$

- Llamando $\omega^2 = (2\Omega\cos\alpha)^2$ y usando $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dddot{x} = -\omega^2\dot{x} \\ \dddot{y} = -\Omega g\sin(2\alpha) - \omega^2\dot{y} \end{cases}$$

- La solución de las EDOs son:

$\dot{x} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

$\dot{y} = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) - \dfrac{\Omega g\sin(2\alpha)}{\omega^2}$

- Las condiciones iniciales son: $\ddot{x}(0) = g\sin\alpha$

$$x(0) = y(0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0 \quad ; \quad \ddot{y}(0) = 0$$

↳ usando las condiciones de la velocidad se obtiene que:

$$A = 0$$

$$C = \frac{\Omega g \sin(2\alpha)}{\omega^2}$$

↳ usando las condiciones de la aceleración:

$$g\sin\alpha = B\omega \Rightarrow B = \frac{g\sin\alpha}{\omega}$$

$$D = 0$$

- Reemplazando A, B, C y D en $\dot{x}(t)$ y $\dot{y}(t)$:

$$\dot{x} = \frac{g\sin\alpha}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$\dot{y} = \frac{\Omega g \sin(2\alpha)}{\omega^2}\cos(\omega t) - \frac{\Omega g\sin(2\alpha)}{\omega^2}$$

- Integrando una vez y reemplazando la condición inicial:

$$\boxed{x(t) = -\frac{g\sin\alpha}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)) \qquad y(t) = \frac{\Omega g\sin(2\alpha)}{\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin(\omega t) - t\right) \quad , \quad \text{con } \omega = 2\Omega\cos\alpha}$$

(c)

- El máximo descenso es igual al máximo en $x(t)$:

$$x(t) = \frac{g\sin\alpha}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega t)\right)$$

- Esto es máximo cuando $\cos(\omega t) = -1$

$$\Rightarrow \boxed{x_{max} = \frac{2g\sin\alpha}{\omega^2}, \quad \text{con} \quad \omega = 2\Omega\cos\alpha}$$

- Para determinar la máxima rapidez hay que calcular $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{g\sin\alpha}{\omega}\right)^2 \sin^2(\omega t) + \left(\frac{\Omega g\sin(2\alpha)}{\omega^2}\right)^2\left(\cos(\omega t) - 1\right)^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{g\sin\alpha}{2\Omega\cos\alpha}\right)^2 \sin^2(\omega t) + \left(\frac{g\sin(\alpha)}{2\Omega\cos\alpha}\right)^2\left(\cos(\omega t) - 1\right)^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{g\sin\alpha}{2\Omega\cos\alpha}\right)^2 - \left(\frac{g\sin\alpha}{2\Omega\cos\alpha}\right)^2 \cdot 2\cos(\omega t) + \left(\frac{g\sin\alpha}{2\Omega\cos\alpha}\right)^2$$

- Lo cual es máximo cuando $\cos(\omega t) = -1$:

$$\Rightarrow \boxed{v^2_{max} = 4\left(\frac{g\sin\alpha}{2\Omega\cos\alpha}\right)^2}$$

P3)

Auxiliar 7

(a)

- Los puntos de equilibrios se encuentran donde $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -u_o a^2 \left(\frac{3a_o}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{eq} = \frac{3a_o}{2}}$$

(b)

- Para encontrar la frecuencia a pequeñas oscilaciones hay que hacer Taylor entorno a x_{eq}:

$$V(x) \approx \frac{u_o a^3}{x_{eq}^3} - \frac{u_o a^2}{x_{eq}^2} + \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_{eq}} \cdot x + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x_{eq}} \cdot x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\Rightarrow V(x) \approx u_o \left(\frac{8}{27} - \frac{4}{9} \right) + \frac{1}{2} \frac{u_o}{a^2} \left(\frac{12 \cdot 2^5}{3^5} - \frac{6 \cdot 2^4}{3^4} \right) x^2$$

$$\Rightarrow V(x) \approx -\frac{4u_o}{27} + \frac{16\,u_o}{81 a_o^2} x^2$$

- La frecuencia está dada por el término que acompaña a x^2 dividido en m (esto pq el potencial de un oscilador está dado por $V(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2$)

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{32\,u_o}{81\,a_o^2\, m}}$$