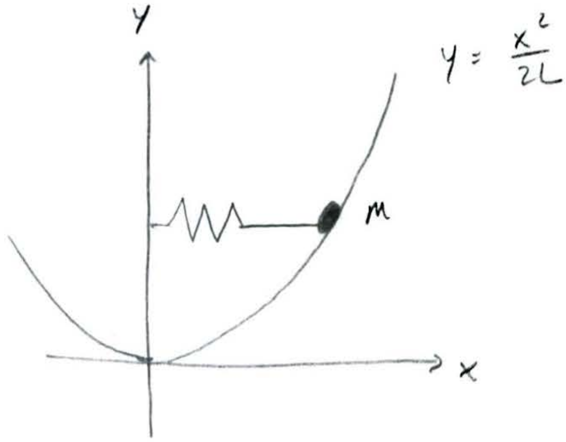
PAUTA AUX 8

P1



a) La fuerza es $\vec{F}_{AB} = K(Ay\hat{x} + Bx\hat{y})$

Si fuera conservativa existe un potencial $U(x,y,z)$ tal que

$$-\nabla U = \vec{F}_{AB}$$

① $-\frac{\partial U}{\partial x} = KAy \Rightarrow U = KAyx + C(y,z)$

② $-\frac{\partial U}{\partial y} = KBx \Rightarrow U = KBxy + C(x,z)$

③ $-\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \Rightarrow U = C(x,y)$

Al integrar en x, la constante de integración es una función de "y" y de "z". Ocurre algo análogo para y.

La ecuación ① nos dice que U solo depende de x según $KAxy$, mientras que ② nos dice que U solo depende de y según $KBxy$. La única forma de que esto sea consistente es $A = B$

$\Rightarrow$ El potencial solo está bien definido para $A = B$

$\Rightarrow \vec{F}_{AB}$ solo es conservativa si $A = B$, con potencial

$$U = KAxy$$

b) El trabajo es $W_{AB} = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}_{AB} \cdot d\vec{l} = \int_{x_i}^{x_f} K(Ay\hat{x} + Bx\hat{y}) \cdot (dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y})$, con $y = \frac{x^2}{2L}$, $dy = \frac{x}{L}dx$

$$W_{AB} = K\int_{x_i}^{x_f} \frac{Ax^2}{2L} + \frac{Bx^2}{L}\,dx = \frac{K}{6L}\left[Ax^3 + 2Bx^3\right]_{x_i}^{x_f}$$

$$W_{AB} = \frac{K}{6L}(A+2B)(x_f^3 - x_i^3)$$

c) Sumamos la energía potencial del resorte y la gravedad

$$U_{TOTAL} = \frac{1}{2} k (L - x)^2 + mg \frac{x^2}{2L}$$

d) Condición inicial: $x = x_i$ $v = v_0$

Condición final: $x = x_f$ $v = 0$

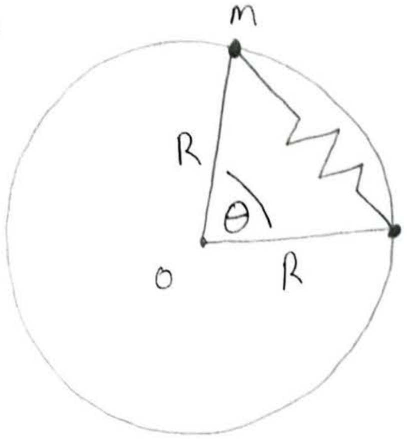
$$E_f - E_i = W_{AB}$$

$$\frac{1}{2} k (L - x_f)^2 + mg \frac{x_f^2}{2L} - \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} k (L - x_i)^2 - mg \frac{x_i^2}{2L} = \frac{K}{6L} (A + 2B)(x_f^3 - x_i^3)$$

$$\frac{K}{2} \left[(L - x_f)^2 - (L - x_i)^2 \right] + \frac{mg}{2L} (x_f^2 - x_i^2) - \frac{K}{6L} (A + 2B)(x_f^3 - x_i^3) - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$$

Obtenemos la ecuación que determina la posición final x_f

P2|



Por teorema del coseno, el largo del resorte es $L^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\theta$

$$L = R\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

La energía potencial del sistema es

$$U = \frac{K}{2}\left[R\sqrt{2(1-\cos\theta)} - l_0\right]^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = K\left(R\sqrt{2(1-\cos\theta)} - l_0\right)\frac{R\sin\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} \overset{!}{=} 0$$

↳ Para encontrar un punto de equilibrio

$$\Rightarrow \sin\theta_{Eq} = 0$$

$$\Rightarrow \theta_{eq} = 0 \qquad \theta_{eq} = \pi$$

$$\Rightarrow \cos\theta_{eq} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l_0}{R}\right)^2$$

solo tiene sentido si $l_0 < 2R$

* Pero para $\theta_{eq} = 0$ el denominador se hace cero también, por lo que $\theta = 0$ no es una posición de equilibrio

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\pi} = \frac{KR}{\sqrt{2}}\left.\frac{\left(R\sqrt{2(1-\cos\theta)} - l_0\right)\cos\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}\right|_{\theta=\pi} = \frac{KR}{\sqrt{2}}\frac{(2R-l_0)\cdot(-1)}{2}$$

$$= \frac{KR}{2\sqrt{2}}(l_0 - 2R)$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\pi} \begin{array}{lll} > 0 & \text{si} & l_0 > 2R \Rightarrow \text{Estable} \\ < 0 & \text{si} & l_0 < 2R \Rightarrow \text{Inestable} \end{array}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\cos\theta = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{l_0}{R}\right)^2} = \left.\frac{KR\sin\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} \cdot \frac{R\sin\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}\right|_{\cos\theta = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{l_0}{R}\right)^2}$$

$$= \left.\frac{KR^2}{2(1-\cos\theta)}(1-\cos^2\theta)\right|_{\cos\theta = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{l_0}{R}\right)^2}$$

$$= \frac{KR^4}{l_0^2}\left(\left(\frac{l_0}{R}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{l_0}{R}\right)^4\right) = KR^2\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{l_0}{R}\right)^2\right)$$

Siempre que existe el equilibrio $\cos\theta_{eq} = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{l_0}{R}\right)^2$, este es estable

Frecuencia de pequeñas oscilaciones: Cuando puedo escribir la energía del sistema como $E = \frac{\alpha}{2}\dot{x}^2 + U(x)$, entonces la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a un x de equilibrio es

$$\omega^2 = \frac{U''(x_{eq})}{\alpha}$$

En este caso $\alpha = mR^2$. La frecuencia es

$$\omega^2 = \frac{1}{mR^2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta_{eq}}$$