Soluciones
Guía de Problemas 6

FI2001-6	Mecánica
Profesor:	Francisco Brieva Rodríguez
Auxiliares:	Esteban Aguilera Marinovic
	Joaquín Medina Dueñas

Pregunta 1

(a)

Sabemos que la función potencia está dada por:

$$U(r) = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Dado que $F = -\nabla U(r)$, entonces, utilizando coordenadas polares:

$$F = -\frac{\partial U(r)\hat{r}}{\partial r} - \frac{\partial U(r)\hat{\phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial U(r)\hat{z}}{\partial z}$$

Pero como $U(r)$ no depende ni de ϕ ni de z, entonces:

$$F = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}\hat{r}$$

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial r^{-1}}{\partial r}\hat{r}$$

$$F = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Finalmente, podemos escribir las ecuaciones de movimiento:

$$\hat{r} : m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\hat{\phi} : m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = 0$$

Dado que no hay fuerzas en el eje $\hat{\phi}$, podemos concluir que este movimiento depende únicamente de una fuerza que actúa en el eje $\hat{r}$, es decir, de una fuerza central, lo que implica que el momentum angular $\vec{l}$ se conserva.

(b)

Dado que el momentum se conserva:

$$\vec{l} = \vec{l_0}$$

$$mr^2\dot{\phi}\hat{z} = mr_0^2\dot{\phi}_0\hat{z}$$

$$\dot{\phi} = \frac{r_0^2\dot{\phi}_0}{r^2}$$

Por otro lado, sabemos que la energía de la partícula va a estar dada por:

$$E = E_k + U(r)$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}})^2 - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi})^2 - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2\hat{r}^2 + \dot{r}r\dot{\phi}\hat{r}\hat{\phi} + r^2\dot{\phi}^2\hat{\phi}^2) - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Reordenando los terminos, y reemplazando $\dot{\phi}$ en la ecuación, tenemos:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{mr_0^4\dot{\phi}_0^2}{2r^2}$$

Y así, definiendo $\bar{U}(r)$ como la energía potencial efectiva, tenemos que:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \bar{U}(r)$$

Con

$$\bar{U}(r) = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{mr_0^4\dot{\phi}_0^2}{2r^2}$$

Luego,

$$m\ddot{r} = -\nabla\bar{U}(r)$$

$$m\ddot{r} = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{mr_0^4\dot{\phi}_0^2}{r^3}$$

(c)

Imponiendo $m\ddot{r} = 0$, encontraremos el punto de equilibrio $\bar{r}$ de la ecuación. De aquí nos queda que estos van a estar determinados por:

$$\bar{r} = \frac{4\pi\epsilon_0 mr_0^4\dot{\phi}_0^2}{Qq}$$

Evaluando en la segunda derivada con respecto a r de nuestra funcion de potencial efectiva, y estudiando si el resultado es positivo o negativo, sabremos si es punto de equilibrio estable o inestable:

$$\frac{\partial^2\bar{U}(\bar{r})}{\partial r^2} = -\frac{Qq}{2\pi\epsilon_0\bar{r}^3} + \frac{3mr_0^4\dot{\phi}_0^2}{\bar{r}^4}$$

Reorganizando la ecuacion, nos queda:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}(\bar{r})}{\partial r^2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 \bar{r}^3}$$

La cual es siempre positiva, para cualquier valor de q.
Por lo que este siempre será un punto de equilibrio estable.
Haciendo la expansión de Taylor para $\bar{U}(r)$, nos queda:

$$\bar{U}(r) = \bar{U}(\bar{r}) + \frac{\partial \bar{U}}{\partial r}(\bar{r})(r-\bar{r}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial^2 r}(\bar{r})(r-\bar{r})^2$$

$$\bar{U}(r) = \frac{Qq}{8\pi\epsilon_0 \bar{r}}(r-\bar{r}) - \frac{Qq}{8\pi\epsilon_0 \bar{r}^3}(r-\bar{r})^2$$

Luego:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - \bar{U}(\bar{r}) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial^2 r}(\bar{r})(r-\bar{r})^2]}$$

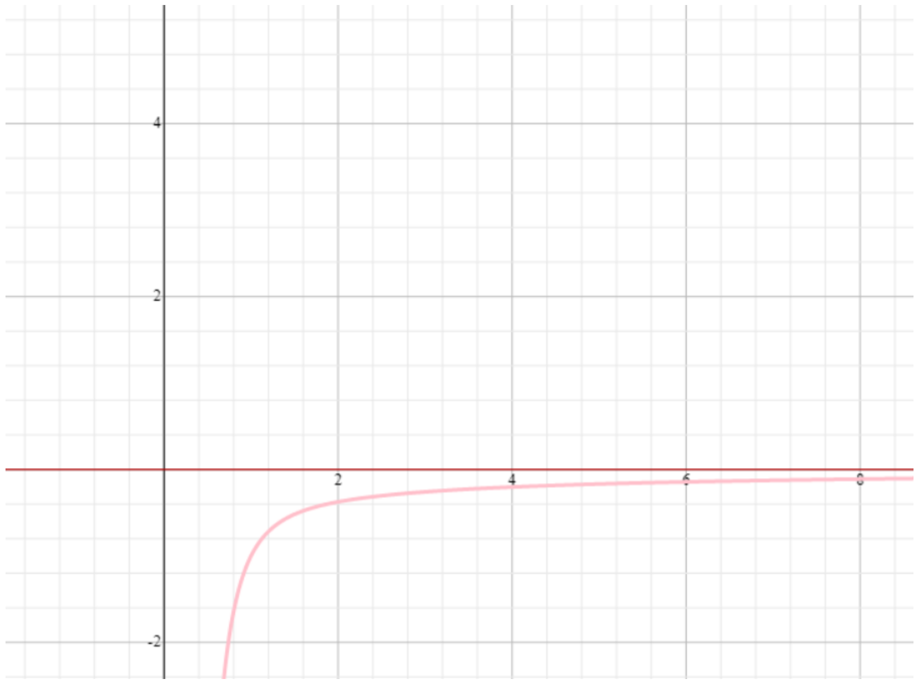
Por lo que la frecuencia estará dada por:

$$w = \sqrt{\frac{Qq}{m4\pi\epsilon_0 \bar{r}^3}}$$

(d)

Aquí podemos observar el gráfico de la función potencial efectivo, $\bar{U}(r)$.

Ahora, ¿Que pasa si agregamos el termino $-\frac{C}{r^3}$?



Como podemos ver, la función cambia drásticamente. Claramente no hay puntos de equilibrio estables. Es más, ya que se acerca asíntoticamente al eje de las abscisas, se puede argumentar que no hay ningún punto de equilibrio.

Pregunta 2

(a)

Consideremos inicialmente el sistema de coordenadas esféricas no inercial S' para el anillo, originado en el centro de giro del alambre, con $\hat{\rho}$ apuntando hacia el anillo y $\hat{\theta}$ perpendicular a éste, hacia abajo. El vector perpendicular a ambos $\hat{\phi}$ será $\hat{\rho} \times \hat{\theta}$.

De esta forma, considerando θ como el ángulo en sentido horario formado entre la vertical y $\hat{\rho}$, podemos describir $\hat{z}$ como el siguiente:

$$\hat{z} = \cos\theta\hat{\rho} - \sin\theta\hat{\theta}$$

Y así:

$$\vec{\Omega} = \Omega\hat{z} = \Omega(\cos\theta\hat{\rho} - \sin\theta\hat{\theta})$$

Luego, definimos las ecuaciones básicas de movimiento para el anillo según este sistema no inercial:

$$\begin{aligned}
\vec{r}' &= R\hat{\rho} \\
\dot{\vec{r}}' &= R\dot{\theta}\hat{\theta} \\
\ddot{\vec{r}}' &= -R\dot{\theta}\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}
\end{aligned}$$

Con lo que podemos calcular las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\vec{\Omega} \times \vec{r}' &= \Omega(\cos\theta\hat{\rho} - \sin\theta\hat{\theta}) \times R\hat{\rho} \\
&= -\Omega\sin\theta R(\hat{\theta} \times \hat{\rho}) \\
&= \Omega\sin\theta R\hat{\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') &= \Omega(\cos\theta\hat{\rho} - \sin\theta\hat{\theta}) \times \Omega\sin\theta R\hat{\phi} \\
&= (\Omega\cos\theta\hat{\rho} \times \Omega\sin\theta R\hat{\phi}) - (\Omega\sin\theta\hat{\theta} \times \Omega\sin\theta R\hat{\phi}) \\
&= \Omega^2\sin\theta\cos\theta R(\hat{\rho} \times \hat{\phi}) - \Omega^2\sin^2\theta R(\hat{\theta} \times \hat{\phi}) \\
&= -\Omega^2\sin\theta\cos\theta R\hat{\theta} - \Omega^2\sin^2\theta R\hat{\rho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}' &= \Omega(\cos\theta\hat{\rho} - \sin\theta\hat{\theta}) \times R\dot{\theta}\hat{\theta} \\
&= \Omega\cos\theta R\dot{\theta}(\hat{\rho} \times \hat{\theta}) \\
&= \Omega\cos\theta R\dot{\theta}\hat{\phi}
\end{aligned}$$

Y así, podemos finalmente expresar la aceleración del anillo según el sistema de referencia inercial:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}' \\
&= -R\dot{\theta}\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} + \Omega \sin\theta R\hat{\phi} + (-\Omega^2 \sin\theta\cos\theta R\hat{\theta} - \Omega^2 \sin^2\theta R\hat{\rho}) + 2\Omega\cos\theta R\dot{\theta}\hat{\phi} \\
&= -(R\dot{\theta} + \Omega^2 \sin^2\theta R)\hat{\rho} + (R\ddot{\theta} - \Omega^2 \sin\theta\cos\theta R)\hat{\theta} + (\Omega\sin\theta R + 2\Omega\cos\theta R\dot{\theta})\hat{\phi}
\end{aligned}
$$

(b)

Procedemos a estudiar las fuerzas sobre el anillo:

$$
\begin{aligned}
\sum \vec{F} &= N\hat{\rho} - mg\hat{z} \\
&= N\hat{\rho} - mg(\cos\theta\hat{\rho} - \sin\theta\hat{\theta}) \\
&= (N - mg\cos\theta)\hat{\rho} + mg\sin\theta\hat{\theta}
\end{aligned}
$$

Luego, estudiando el movimiento en $\hat{\theta}$:

$$
mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta + m\Omega^2\cos\theta\sin\theta R
$$

Donde, imponiendo condición de equilibrio ($\ddot{\theta} = 0$):

$$
\begin{aligned}
0 &= mg\sin\theta + m\Omega^2\cos\theta\sin\theta R \\
&= \sin\theta(g + \Omega^2\cos\theta R)
\end{aligned}
$$

Así, los puntos de equilibrio del sistema deberán cumplir una de dos condiciones:

$$
\sin\theta = 0 \qquad\qquad o \qquad\qquad \cos\theta = -\frac{g}{\Omega^2 R}
$$

Ahora evaluemos estos puntos de equilibrio en la segunda derivada del potencial, para determinar si son puntos minimos.

$$
\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = -mg\cos\theta - 2m\Omega^2\cos^2\theta R + m\Omega^2 R \tag{1}
$$

Considerando sólo el sistema entre $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$, tendremos que $\sin\theta = 0$ si y sólo si $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

Veamos qué ocurre con la ecuación (1) para cada uno de los 3 casos favorables:

($\theta = 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= -mg\cos 0 - 2m\Omega^2\cos^2 0R + m\Omega^2 R \\
&= -mg - 2m\Omega^2 R + m\Omega^2 R \\
&= -(mg + m\Omega^2 R)
\end{aligned}$$

Lo cual es siempre negativo, por lo que $\theta = 0$ no es un punto de equilibrio.

($\theta = \pi$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= -mg\cos \pi - 2m\Omega^2\cos^2 \pi R + m\Omega^2 R \\
&= mg - 2m\Omega^2 R + m\Omega^2 R \\
&= mg - m\Omega^2 R \\
&= m(g - \Omega^2 R)
\end{aligned}$$

Lo cual servirá como punto de equilibrio sólo si $g > \Omega^2 R$.

($cos\theta = -\frac{g}{\Omega^2 R}$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= -mg\cos \theta - 2m\Omega^2\cos^2 \theta R + m\Omega^2 R \\
&= \frac{mg^2}{\Omega^2 R} - \frac{mg^2\Omega^2 R}{\Omega^4 R^2} + m\Omega^2 R \\
&= \frac{mg^2}{\Omega^2 R} - \frac{2mg^2}{\Omega^2 R} + \frac{m\Omega^4 R^2}{\Omega^2 R} \\
&= \frac{m}{\Omega^2 R}(\Omega^4 R^2 - g^2) \\
&= \frac{m(\Omega^2 R + g)}{\Omega^2 R}(\Omega^2 R - g)
\end{aligned}$$

Lo cual servirá como punto de equilibrio sólo si $g < \Omega^2 R$.

(c)

Como hemos obtenido dos valores favorables para el punto de equilibrio según la relacion entre g y $\Omega^2 R$, nos pondremos en ambos casos y resolveremos según ellos:

($g > \Omega^2 R$)

En este caso el punto de equilibrio se da en $\theta = \pi$, con lo que la frecuencia en pequeñas oscilaciones resulta:

$$\omega^2 = \frac{1}{mR^2}(mg - m\Omega^2 R)$$

Lo cual efectivamente tiene sentido sólo bajo la condición antes impuesta.

($g < \Omega^2 R$)

Ahora el punto de equilibrio se da cuando $\cos\theta = -\frac{g}{\Omega^2 R}$, por lo que finalmente se tiene:

$$\omega^2 = \frac{1}{mR^2}(\frac{-mg^2}{\Omega^2 R} + m\Omega^2 R)$$

Lo que, nuevamente, tiene sentido únicamente bajo la condición antes impuesta.

Pregunta 3

(a)

Recordando la relación masa-densidad del anillo, podemos establecer la siguiente ecuación:

$$\rho = \frac{M}{2\pi R} \tag{1}$$

Y definiendo la densidad como el diferencial de masa en función del arco, se tiene:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{dM}{ds} \\ &= \frac{dM}{d\phi R} \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en (1):

$$\begin{aligned} \frac{dM}{d\phi R} &= \frac{M}{2\pi R} \\ dM &= \frac{M}{2\pi} d\phi \end{aligned}$$

Así, recordando la expresión para la energía potencial gravitacional producida sobre la masa m por un punto del anillo:

$$\begin{aligned} U(r) &= -\frac{Gm}{r} dM \\ &= -\frac{GmM}{2\pi r} d\phi \end{aligned}$$

Finalmente integramos dicha expresión para obtener la energía potencial producida por todo el anillo:

$$\begin{aligned} U_t(r) &= -\int_0^{2\pi} \frac{GmM}{2\pi r} d\phi \\ &= -\frac{GmM}{2\pi r} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= -\frac{GmM}{2\pi r} 2\pi \\ &= -\frac{GmM}{r} \\ &= -\frac{GmM}{\sqrt{R^2 + z^2}} = U(z) \end{aligned}$$

(b)

Para encontrar el punto de equilibrio, primero derivamos $U(z)$:

$$\begin{aligned} U(z) &= -\frac{GmM}{\sqrt{R^2+z^2}} \\ U'(z) &= -GmM\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \\ &= GmMz(R^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Lo cual será 0 sólo si $z = 0$. Ahora necesitamos ver la concavidad de la función en dicho punto, así que derivamos de nuevo:

$$\begin{aligned} U'(z) &= GmMz(R^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ U''(z) &= GmM\frac{d}{dz}\left(z(R^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= GmM\left((R^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3z^2(R^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right) \\ &= GmM(R^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{3z^2}{R^2+z^2}\right) \end{aligned}$$

Y tomando $z = 0$:

$$\begin{aligned} U''(z) &= GmM(R^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{3z^2}{R^2+z^2}\right) \\ U''(0) &= GmMR^{-3} \end{aligned}$$

Lo cual, por la naturaleza de las constantes utilizadas, es siempre mayor a 0. Así, $z = 0$ es efectivamente un punto de equilibrio.

Por lo tanto al tener la segunda derivada del potencial evaluado en el punto de equilibrio, facilmente se puede determinar la frecuencia de oscilaciones.

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{m}U''(0) \\ &= \frac{GmMR^{-3}}{m} \\ &= GMR^{-3} \end{aligned}$$