AUX 14

P1) La energía antes del frenazo es nula por ser una parábola

Ahora obtenemos la energía de la elipse

$$E = \underbrace{\cancel{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}_{0} + \frac{l^2}{2mD^2} - \frac{GMm}{D}}_{\text{Energía evaluada en el punto A}} = \underbrace{\cancel{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}_{0} + \frac{l^2}{2mR^2} - \frac{GMm}{R}}_{\text{Energía evaluada en el punto B}}$$

Despejamos el momentum angular $\frac{l^2}{2m}\left(\frac{1}{D^2} - \frac{1}{R^2}\right) = GMm\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R}\right)$

$$\Rightarrow l^2 = 2GMm^2 \cdot \frac{RD}{R+D}$$

Ahora podemos obtener la energía

$$E = GMm\left(\frac{R}{D(R+D)} - \frac{1}{D}\right) = -\frac{GMm}{R+D}$$

Por lo qué la perdida de energía cinética en el momento de frenar es $\frac{GMm}{R+D}$

P2 La energía inicial del asteroide es $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{GMm}{\sqrt{2} R_p} = 0$

Si le agregamos una velocidad tangencial nos queda una energía

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r} + \frac{1}{2} m V_T^2 - \frac{GMm}{\sqrt{2} R_p} = \frac{1}{2} m V_T^2$$

El momentum angular de la órbita es $l = m\sqrt{2} R_p V_T$

Para ver si el asteroide choca imponemos $r_{min} = R_p$. Vemos la energía en ese punto:

$$\underbrace{\cancel{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}}_{0} + \frac{(m\sqrt{2} R_p V_T)^2}{2 m R_p^2} - \frac{GMm}{R_p} = \frac{1}{2} m V_T^2$$

$$V_T^2 \left(m - \frac{m}{2} \right) = \frac{GMm}{R_p}$$

$$V_T^2 = \frac{2GM}{R_p}$$

Para $v_T \geq \sqrt{\frac{2GM}{R_p}}$ Bruce Willis salva al planeta

b) Tenemos $r(\phi) = \dfrac{\frac{l^2}{GMm^2}}{1 + \epsilon \cos(\phi)}$ evaluando en $\phi = 0 \Rightarrow r = r_{min}$

$$R_p (1 + \epsilon) = \frac{(m\sqrt{2} R_p V_T)^2}{GMm^2} = 4 R_p \Rightarrow \epsilon = 3$$

la órbita es hiperbólica

c) Ahora debemos encontrar el ϕ que satisface $r(\phi) = \sqrt{2} R_p$

$$\sqrt{2} R_p = \frac{4 R_p}{1 + 3\cos(\phi)} \Rightarrow \cos(\phi) = \left[\frac{4}{\sqrt{2}} - 1 \right] \frac{1}{3}$$