P1. Considere la partícula de masa m sometida a una fuerza lineal atractiva $\vec{F} = k_x(xL)\hat{x} - k_y(yL)\hat{y}$, donde (k_x, k_y) son las constantes elásticas según los ejes $(\hat{x}, \hat{y})$ respectivamente. Y L indica la posición de equilibrio de la masa, con valor $L = 0,5$ [unidad de longitud].

a) Determine la trayectoria de m en el plano XY , y grafique su resultado para distintos valores del cociente k_x/k_y. Considere los casos $\sqrt{k_x/k_y}$ entero e irracional. La partícula se libera desde $x(t = 0) = y(t = 0) = 1$ [unidad de longitud], con velocidad nula.

Se definirá el sistema de coordenadas cartesianas tal que la partícula se encuentre a un posición (L,L) del origen, así se modelara la acción de esta fuerza sobre la partícula en ausencia de gravedad. Es fácil ver que este sistema corresponde a un movimiento oscilatorio simple en x e y, por lo que sus ecuaciones de movimiento son:

$$m\ddot{y} = -k_y(y - L)$$

$$m\ddot{x} = -k_x(x - L)$$

Resolviendo las EDOs homogéneas nos quedan:

$$y(t) = Asen\omega_y t + Bcos\omega_y t + L$$

$$x(t) = Csen\omega_x t + Dcos\omega_x t + L$$

Con $\omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}$ y $\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}$ las velocidades angulares en cada eje. Al considerar las condiciones iniciales del problema se determina que $A = C = 0$ y $B = D = 0{,}5$, finalmente siendo estas las ecuaciones que describen el movimiento de la partícula:

$$y(t) = \frac{1}{2}cos\left(\sqrt{\frac{k_y}{m}}t\right) + \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}cos\left(\sqrt{\frac{k_x}{m}}t\right) + \frac{1}{2}$$

Para analizar la trayectoria de la partícula en los casos de $\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}$, esta se ha graficado en MatLab para los valores $1, 2, 3, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$.

Como se puede apreciar en las figuras 1, 2 y 3, cuando la relación $\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}$ toma un valor entero, la partícula realiza una trayectoria determinada que se repite en el tiempo que en este caso, gracias a las condiciones iniciales, resulta ser el mismo camino *de ida y de vuelta*. En el caso en que el resultado de $\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}$ es irracional, que se representa en las figuras 4, 5, 6, la partícula tiene una trayectoria que no es periódica. En este caso la partícula oscila en torno al punto de equilibrio, pero no sigue ningún patrón que se repita.

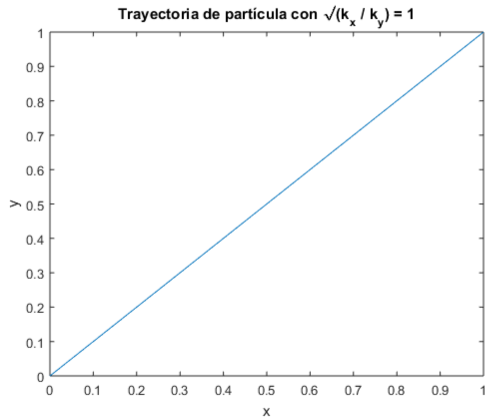


Figura 1: Trayectoria de una partícula sin amortiguamiento

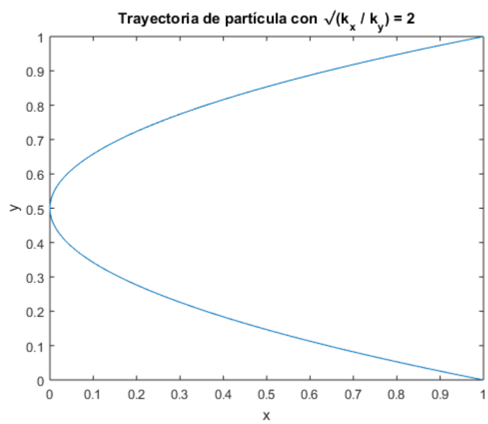


Figura 2: Trayectoria de una partícula sin amortiguamiento

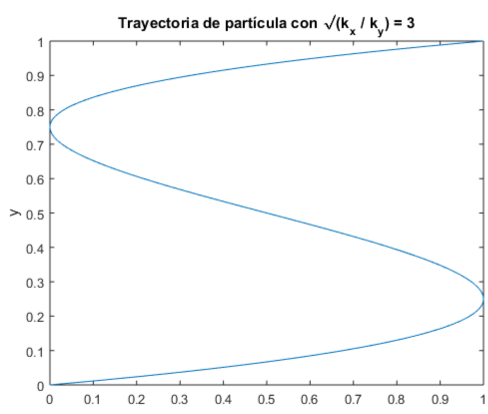


Figura 3: Trayectoria de una partícula sin amortiguamiento

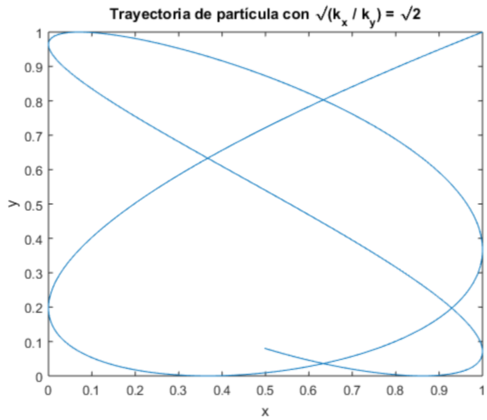


Figura 4: Trayectoria de una partícula sin amortiguamiento

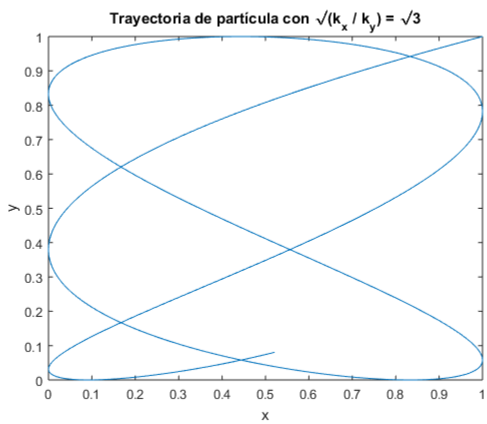


Figura 5: Trayectoria de una partícula sin amortiguamiento

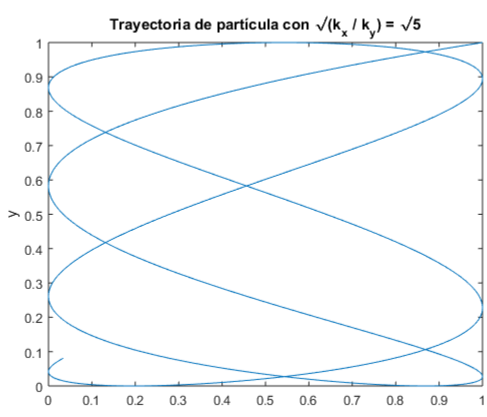


Figura 6: Trayectoria de una partícula sin amortiguamiento

b) Complique el problema agregando roce viscoso $\vec{F} = -c\vec{v}$ con c la constante de viscosidad. Analice el movimiento de la masa y compare con a). Comente sobre los casos de subamortiguamiento y amortiguamiento crítico. ¿Se detiene la partícula?

Se puede notar que a fuerza amortiguante se puede descomponer en los ejes como $\vec{F} = -c(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y})$. Luego, solo basta incorporarla a las ecuaciones de movimiento como sigue:

$$m\ddot{x} = -k_x(x - L) - c\dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -k_y(y - L) - c\dot{y}$$

Las soluciones del polinomio característico (para ambas, pues solo difieren en la constante k) son:

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

con $\gamma = \frac{c}{2m}$ y $\omega^2 = \frac{k}{m}$

Las soluciones variarán su comportamiento dependiendo de los casos para $\delta_z = \gamma^2 - \omega_z^2$.

Obs: se trabajará con z(t), pues x e y son análogas y bastará reemplazar en z(t)=y(t) o x(t) con sus respectivas velocidades angulares para obtener la ecuación necesitada.

En este caso se analizaran los casos de subamortiguamiento y amortiguamiento critico:

Caso 1,Amortiguamiento critico:

Este es el caso en que $\delta_z = 0$ y se produce resonancia, por lo que la ecuación genérica seria:

$$z(t) = L + e^{-\gamma t}(A + Bt)$$

Despejando A y B con las condiciones iniciales para z(t)=x(t)=y(t) (pues son casi idénticos):

$$z(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\gamma t}(1 + \gamma t)$$

Notar que esta condición critica es en ambas direcciones, por lo que es imprescindible que $k_x = k_y$.

Caso 2, Subamortiguamiento: Ocurre cuando $\delta_z < 0$, entonces la ecuación se transforma en:

$$z(t) = L + e^{-\gamma t}(Acos(\sqrt{\omega_z^2 - \gamma^2}t) + Bsen(\sqrt{\omega_z^2 - \gamma^2}t))$$

Con las condiciones iniciales queda:

$$z(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\gamma t}(cos(\sqrt{\omega_z^2 - \gamma^2}t) + \frac{\gamma}{\sqrt{\omega_z^2 - \gamma^2}}sen(\sqrt{\omega_z^2 - \gamma^2}t))$$

Para analizar gráficamente los casos con movimiento sub-amortiguado y amortiguado críticamente se realizarán unos gráficos representando la trayectoria de la partícula en estos casos.

Como se puede apreciar en 7, la partícula converge en el punto de equilibrio, pero en ningún eje alcanza valores menores a la posición del punto de equilibrio. Por otro lado, en el caso en que la partícula está sub-amortiguada en el eje x y en el eje y que corresponde a la figura 8, es fácil notar que la partícula oscila en torno al punto de equilibrio en coordenada x e y a medida que esta converge hacia este punto.

En contraste con el caso en que no existe roce viscoso, se puede observar que al existir roce entonces la partícula tiene convergencia hacia el punto de equilibrio, mientras que en el caso ideal la partícula oscila indefinidamente sin presentar convergencia.

Respondiendo a si la partícula se detiene en alguno de estos casos, el limite del tiempo tendiendo a infinito sobre la función de posición nos dice que tiende a 1/2, $\text{lím}_{t\to \text{ínf}}\, z(t) = \frac{1}{2}$. Pero analizando su velocidad $\dot{z}$ se puede notar que no existe tiempo a partir del cual esta velocidad sea 0, por lo tanto no se detendrá, sino que oscilara alrededor de 1/2.

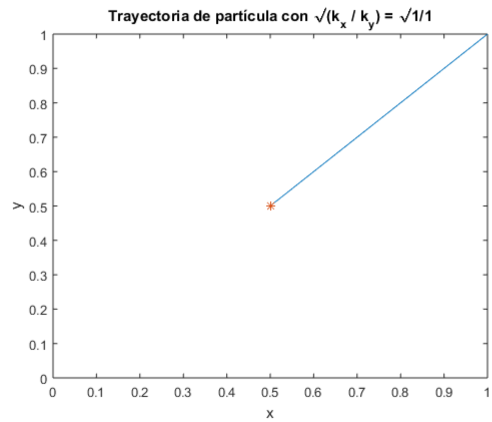


Figura 7: Trayectoria de una partícula con amortiguamiento crítico

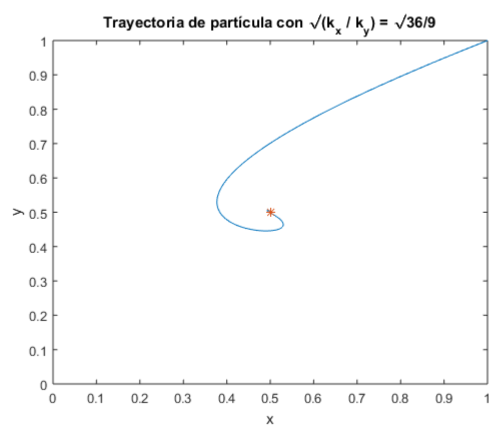


Figura 8: Trayectoria de una partícula subamortiguada

Pregunta 2

El instrumento enunciado corresponde a una caja que se mueve solidaria al piso, conteniendo un objeto de masa m sujeto por su parte superior a un resorte de constante k y sostenida por su parte inferior de un amortiguador de constante c que ejerce fuerza de forma lineal con la velocidad. La frecuencia natural del instrumento corresponde a $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

(a)

Lo buscado en esta parte de la pregunta es encontrar la ecuación de movimiento de la masa cuando el suelo se mueva por un sismo modelado como un movimiento vertical de la forma $y(t) = y_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ medido con respecto a un SRI.

Para resolver lo pedido y en las preguntas subsiguientes, se supondrá que todo el movimiento solo ocurre de forma vertical, en una dirección $\hat{y}$ que es positiva hacia arriba, por ende todo el movimiento se modelará de forma escalar, señalando el origen, como la posición de equilibrio del sistema sin perturbar.

Debido a que la acción de la fuerza de gravedad se contrarresta con la del resorte en el nuevo punto de equilibrio, y en general porque la información del largo natural del resorte no está presente, al ser irrelevante, se despreciará la presencia de la fuerza de gravedad en la resolución del problema.

De esta forma, el problema corresponde a uno de movimiento en un SRNI solidario a la caja, donde el origen de este corresponde al ya señalado, este SRNI tiene un $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\Omega}} = 0$ y $\vec{R}_O = y(t)\hat{y} = y_0 \operatorname{sen}(\omega t)\hat{y}$, de esto es extraíble que:

$$\vec{a}_O = \frac{\mathrm{d}^2 \vec{R}_O}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 \left(y(t)\hat{y}\right)}{\mathrm{d}t^2} = y''(t)\hat{y} = \left(y_0 \operatorname{sen}(\omega t)\hat{y}\right)'' \hat{y} = -y_0\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)\hat{y}$$

Así las fuerzas no inerciales resultan:

$$\vec{F}_{\mathrm{NI}} = -m\vec{a}_0 = my_0\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)\hat{y}$$

Las otras fuerzas que afectan el movimiento corresponden a la del resorte, modelada por $\vec{F}_E = -kz\hat{y}$ y la de amortiguamiento, modelada por $\vec{F}_A = -c\dot{z}\hat{y}$, de esta forma, la ecuación de movimiento se puede modelar como:

$$m\ddot{z} = -kz - c\dot{z} + my_0\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)$$

La cual es una EDO no homogénea que puede ser reescrita por:

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = y_0\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)$$

(b)

Ahora es necesario encontrar la fase estacionaria del movimiento, en particular la amplitud y el desfase de la posición relativa de la masa con respecto a la perturbación.

Notar que es posible reescribir el término $y_0\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)$ como $\operatorname{Im}(y_0\omega^2 e^{i\omega t}) := \operatorname{Im}(F_0 e^{i\omega t})$, así la EDO puede ser reescrita como:

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \operatorname{Im}\left(F_0 e^{i\omega t}\right)$$

Notar que para esta clase de EDOs es posible proponer una solución de la forma:

$$z(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta) = A\,\mathrm{Im}\left(e^{i(\omega t+\delta)}\right) = \mathrm{Im}\left(Ae^{i\delta}e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathring{A}e^{i\omega t}\right)$$

Con esta propuesta de solución, es posible ver que la EDO cumple que:

$$\mathrm{Im}\left(-\omega^2\mathring{A}e^{i\omega t}\right) + \frac{c}{m}\,\mathrm{Im}\left(i\omega\mathring{A}e^{i\omega t}\right) + \frac{k}{m}\,\mathrm{Im}\left(\mathring{A}e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(F_0e^{i\omega t}\right)$$

Agrupando los términos esto se puede reescribir como:

$$\mathrm{Im}\left(\left(-\omega^2 + \frac{c}{m}\omega i + \frac{k}{m}\right)\mathring{A}e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(F_0e^{i\omega t}\right)$$

Recuperando los hechos que $F_0 = y_0\omega^2$, $\mathring{A} = Ae^{i\delta}$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, se llega a que:

$$Ae^{i\delta}\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{c\omega}{m}i\right) = y_0\omega^2$$

En dónde $Ae^{i\delta}$ es un número complejo en forma polar, de donde se pueden extraer tanto su módulo A como su argumento δ, que corresponden a la amplitud del movimiento y el desfase del mismo, en efecto este corresponde a:

$$Ae^{i\delta} = \frac{y_0\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{c\omega}{m}i} = \frac{y_0\omega^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2} - \frac{y_0\omega^3 c}{m\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2\right)}i$$

Dejándolo en su forma mas simplificada, resulta:

$$Ae^{i\delta} = \frac{y_0\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - \frac{c\omega}{m}i\right)$$

Por lo tanto ahora se puede extraer A en función de ω, este queda:

$$A(\omega) = \frac{y_0\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}}$$

De igual forma es posible extraer δ en función de ω, este queda:

$$\delta(\omega) = \mathrm{atan2}\left(\frac{c\omega}{m}, \omega^2 - \omega_0^2\right)$$

Donde la función atan2 es aquella que se utilizar para extraer el argumento de un número complejo, ya que la función arctan tiene el problema de asignar el mismo ángulo tanto a $1 + i$ como a $-1 - i$ (a ambos les asigna $\arctan(1)$).

A continuación se realizará la gráfica de $A(\omega)$ normalizado a y_0 como función de ω normalizado a ω_0, es decir se graficará una función de la forma:

$$\bar{A}(\bar{\omega}) = \frac{A(\bar{\omega})}{y_0} \text{ con } \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

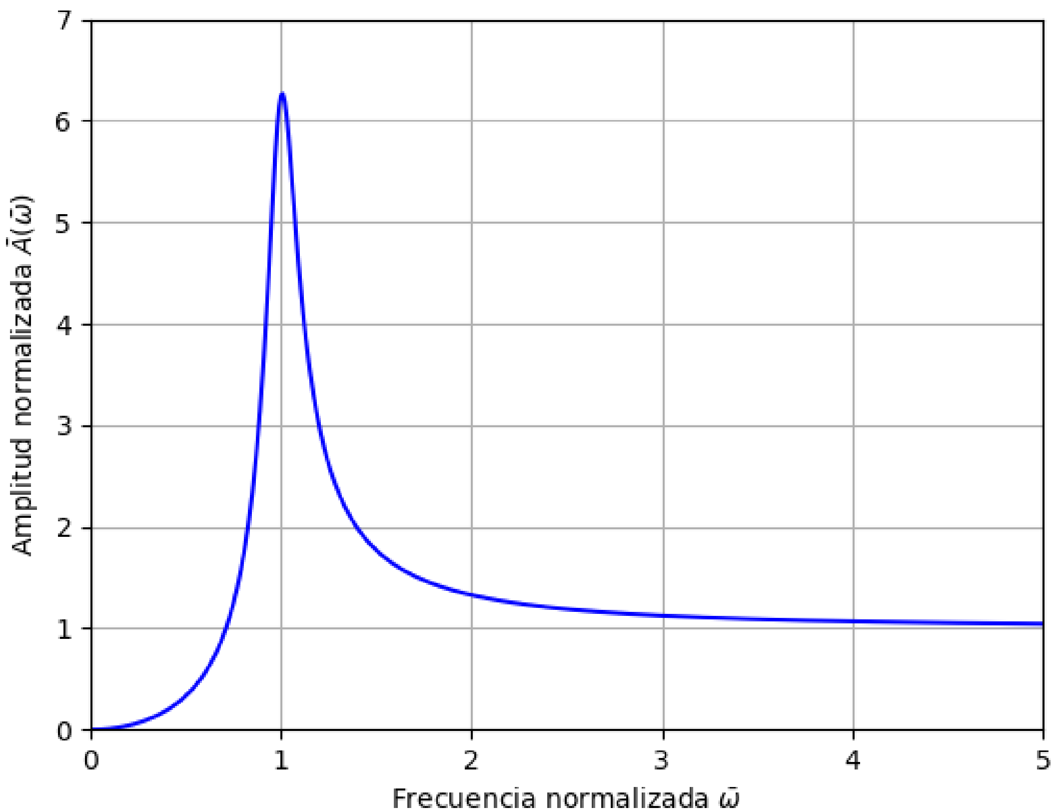
Es decir, $\omega = \bar{\omega}\omega_0$ De esta forma, la función a graficar resulta:

$$\bar{A}(\bar{\omega}) = \frac{\bar{\omega}^2\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2\omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{c\bar{\omega}\omega_0}{m}\right)^2}} = \frac{\bar{\omega}^2}{\sqrt{(1-\bar{\omega}^2)^2 + \left(\frac{c\bar{\omega}}{m\omega_0}\right)^2}}$$

A efectos prácticos, para obtener alguna gráfica, se utilizarán los valores de $c = 10\ \frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{m}}$, $m = 5$ kg y $\omega_0 = 2$ Hz $\approx 12,5\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, por tanto la función a ingresar en la gráfica corresponde a:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (0,16x)^2}}$$

Finalmente esta resulta:



(c)

Analizando la posición de la masa para el caso de un sismómetro, donde se tiene que ω_0 es mucho menor que ω.

Para hacer un análisis tanto de esta parte (c) como de la (d), ver que la ecuación de posición de la masa corresponde a:

$$z(t) = \frac{y_0\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \operatorname{atan2}\left(\frac{c\omega}{m}, \omega^2 - \omega_0^2\right)\right)$$

Usando el dato correspondiente a las frecuencias, es posible aproximar $\omega_0^2 - \omega^2$ por $-\omega^2$, por ende, usando esto se definirá una amplitud $(A_+(\omega))$ y un desfase $(\delta_+(\omega))$ para altas frecuencias , estos resultan:

$$A_+(\omega) = \frac{y_0\omega^2}{\sqrt{(-\omega^2)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} = \frac{y_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega m}\right)^2}}$$

$$\delta_+(\omega) = \text{atan2}\left(\frac{c\omega}{m}, \omega^2\right) \underset{\omega^2>0}{=} \arctan\left(\frac{c\omega}{m\omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{c}{\omega m}\right)$$

De esta forma, la ecuación de movimiento bajo una perturbación de alta frecuencia corresponde a:

$$z_+(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega m}\right)^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \arctan\left(\frac{c}{\omega m}\right)\right)$$

Mas aún, suponiendo una frecuencia ω muy alta, significativamente mayor que $fraccm$, se tiene que $\frac{c}{\omega m} \approx 0$, lo que haría 1 el denominador de A_+ y 0 el argumento de arctan en δ_+, por tanto definiendo una nueva función para perturbaciones con frecuencia muy alta $z_{++}(t)$ se llega a que:

$$z_{++}(t) = y_0 \operatorname{sen}(\omega t) = y(t)$$

De esta forma es posible concluir, que bajo una perturbación de alta frecuencia, el movimiento de la masa es muy similar a la de la perturbación, siendo este una muy buena aproximación de la función que modela la perturbación.

(d)

Analizando la posición de la masa para el caso de un acelerómetro, donde se tiene que ω_0 es mayor que ω, es posible ver que se puede aproximar $\omega_0^2 - \omega^2$ por ω_0^2, usando esta aproximación, es posible definir una amplitud $(A_-(\omega))$ y un desfase $(\delta_-(\omega))$ para bajas frecuencias, estos resultan:

$$A_-(\omega) = \frac{y_0\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} = \frac{y_0\omega^2}{\sqrt{\omega_0^4 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\delta_-(\omega) = \text{atan2}\left(\frac{c\omega}{m}, -\omega_0^2\right) \underset{(\star)}{=} \arctan\left(\frac{c\omega}{-\omega_0^2 m}\right) + \pi = \pi - \arctan\left(\frac{c\omega}{\omega_0^2 m}\right)$$

La igualdad marcada con $(\star)$ se justifica del hecho que $-\omega_0^2 < 0$ y $\frac{c\omega}{m} > 0$. Bajo la misma lógica de la aproximación anterior, es posible corregir las funciones A_- y δ_-, notando que es posible aproximar $\omega_0^4 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2$ por ω_0^4, lo aproximado corresponde al argumento de la raíz en el denominador de A_-. Por otro lado, como $0 < \omega < \omega_0$, entonces $\omega_0 \gg \omega$, por lo que es razonable aproximar el argumento de arctan en la función δ_- a 0, lo que anula $\arctan\left(\frac{c\omega}{\omega_0^2 m}\right)$, de esta forma las funciones corregidas $\tilde{A}_-$ y $\tilde{\delta}_-$ resultan:

$$\tilde{A}_-(\omega) = \frac{y_0\omega^2}{\sqrt{\omega_0^4}} = \frac{y_0\omega^2}{\omega_0^2}$$

$$\tilde{\delta}_-(\omega) = \pi$$

De esta forma, la ecuación de movimiento bajo una perturbación de baja frecuencia corresponde a:

$$z_-(t) = \tilde{A}_-(\omega) \operatorname{sen}\left(\omega t + \tilde{\delta}_-(\omega)\right) = \frac{y_0\omega^2}{\omega_0^2} \operatorname{sen}(\omega t + \pi) = -\frac{y_0\omega^2}{\omega_0^2} \operatorname{sen}(\omega t)$$

Lo que se busca demostrar es que $z_-(t)$ sea proporcional a la aceleración de la vibración, es decir, a $y''(t)$, recordando lo calculado en la parte (a), notar que:

$$y''(t) = (y_0 \operatorname{sen}(\omega t))'' = -y_0\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Por lo que es posible notar finalmente que:

$$z_-(t) = \frac{-y_0\omega^2}{\omega_0^2} \operatorname{sen}(\omega t) = \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \left(-y_0\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)\right) = \frac{1}{\omega_0^2} y''(t)$$

Por lo que se ha demostrado que efectivamente la posición de la masa es proporcional a la aceleración de la vibración $y(t)$.