Ejercicio #1

Tema: Cinemática

Auxiliares: Cristóbal Zenteno & Miguel Letelier

Tiempo: 30 min

P1 Considere una partícula que sigue una trayectoria parabólica, donde $y = ax^2$. Se pide encontrar lo siguiente:

a) Los vectores posición, velocidad y aceleración, si la coordenada x tiene una dependencia temporal de la forma $x = \sqrt{ct}$.

b) Comente sobre la aceleración.

Solución:

a) Si $x = \sqrt{ct}$ y $y = ax^2 = act$, entonces el vector posición escrito en cartesianas

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} \\ \vec{r} &= \sqrt{ct}\hat{x} + act\hat{y} \qquad \text{Vec. Posición } \textit{1 punto} \end{aligned} \tag{1}$$

Derivando la ecuación (1):

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{t}}\hat{x} + ac\hat{y} \qquad \text{Vec. Velocidad } \textit{1 punto} \tag{2}$$

Derivamos la ecuación (2) para encontrar la aceleración:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{c}{t^3}}\hat{x} + 0\hat{y} \qquad \text{Vec. Aceleración } \textit{1 punto} \tag{3}$$

b) Podemos notar de la expresión (3) que la aceleración en la dirección $\hat{y}$ es nula, mientras que en la dirección $\hat{x}$ es decreciente, de hecho si $t \to \infty$ entonces $a_x \to 0$ (*1 punto*).

P2 Si tenemos una partícula que se mueve en una dimensión con la siguiente velocidad:

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{x} \quad \text{donde}$$

$$\dot{x} = te^{-bt^2}$$

Calcule la posición y aceleración en función del tiempo, sabiendo que en el tiempo $t = 0$ la posición es: $\vec{r}(0) = x_0\hat{x}$

Solución:

Integramos $\dot{x}$:

$$\frac{dx}{dt} = te^{-bt^2} \qquad / \int_0^t dt$$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t te^{-bt^2} dt$$

Hagamos un cambio de variable $u = bt^2$ luego $du = 2btdt$ por lo que la integral nos queda:

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{2b} \int_0^{bt^2} e^{-u} du = \frac{1}{2b}(1 - e^{-bt^2})$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \left(\frac{1}{2b}(1 - e^{-bt^2}) + x_0 \right) \hat{x} \qquad \textit{1 punto}$$

Para el vector aceleración derivamos la velocidad:

$$\vec{a} = (e^{-bt^2} - 2bt^2 e^{-bt^2})\hat{x} \qquad \textit{1 punto}$$