Aux 3

P1) La idea es mostrarlo usando la definición.
Para todo real x

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

Ya que $f(a) \leq h(a) \leq g(a) = f(a) \Rightarrow h(a) = f(a) = g(a)$.
Entonces

$$f(x) - f(a) \leq h(x) - h(a) \leq g(x) - g(a)$$

Queremos dividir por $x-a$ y concluir pero no sabemos si $x-a$ es >0 o <0. Dividimos en ambos casos

$$x - a > 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{h(x)-h(a)}{x-a} \leq \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = g'(a)$$

$$x - a < 0 \Rightarrow \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \geq \frac{h(x)-h(a)}{x-a} \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow g'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a).$$

Como el límite por ambos lados existe y es igual $\Rightarrow h'(a)$ existe $= f'(a)$. //

P2| Ya que la función logaritmo natural es continua (en el aux dije creciente me confundí) lo usamos para calcular el límite pues si

$$\lim_{\delta \to 0} \left(f(x+\delta x) / f(x) \right)^{1/\delta} = L$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta \to 0} \ln \left[\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)} \right)^{1/\delta} \right] = \ln L$$

El segundo límite es

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left(\ln f(x+\delta x) - \ln f(x) \right) \overset{\text{de la forma}}{\rightsquigarrow} \frac{0}{0}.$$

Por L'Hopital (o definición de derivada!) (c/r a δ) el límite es

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\left(\ln f(x+\delta x) - \ln f(x) \right)'}{\delta'} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{f(x+\delta x)} \cdot f'(x+\delta x) \cdot (x+\delta x)'$$

$$= \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)},$$

donde usamos regla de la cadena. Concluimos que

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{f(x+dx)}{f(x)} \right)^{1/\delta} = L = e^{\ln L} = e^{\frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}} > 0. \quad //$$

(pues $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

P3| Usando que $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y que $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ (usar derivada de la inversa para calcular) tenemos por regla de la cadena

$$(\arcsin(2x-1))' = \frac{1}{(1-(2x-1)^2)^{1/2}} \cdot (2x-1)'$$

$$= \frac{2}{(4x-4x^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

Por otro lado

$$\left(2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)' = \frac{2}{1+\frac{1-x}{x}} \cdot \left(\left(\frac{1-x}{x}\right)^{1/2}\right)'$$

$$= 2x \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1-x}{x}\right)'$$

$$= -\frac{1}{x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2} = -\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

Entonces $f'(x) = 0$, y $f(x) = cte$ (cuál?).

P4| Simplemente recordamos que $\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$
luego la ecuación es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x} \Rightarrow (\ln f(x))' = (-\ln x)'$$

Como sus derivadas son iguales las funciones difieren por una constante (AUX 2 PS)

$$\Rightarrow \ln f(x) = -\ln x + K = \ln \frac{c}{x}$$

si $K = \ln c$. Concluimos $f(x) = \frac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$. //

P5| Es fácil ver $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$ $\left(\to \frac{\ln 2}{-\infty}\right)$

y que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ $\left(\to -\frac{\infty}{\ln 2}\right)$. Por L'Hopital vemos también

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{-1}{1-x}\right)}{\left(\frac{1}{1+x}\right)} = -1,$$

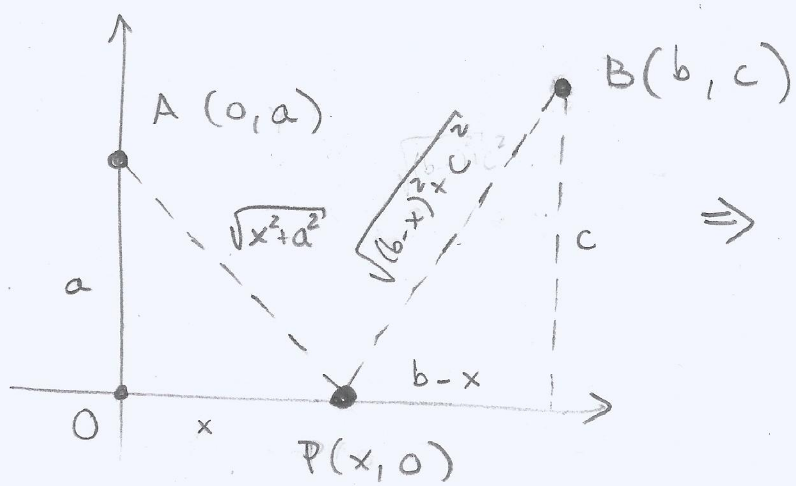
luego definir $f(0) = -1$ hace a f continua.
Calculamos

$$f'(x) = \frac{-(1+x)\ln(1+x) - (1-x)\ln(1-x)}{\underbrace{(1-x^2)\ln^2(1+x)}_{\geq 0}} \Big\} ? \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}$$

Entonces para ver que f es decreciente basta mostrar que $(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x) = g(x)$ es no negativa $\forall x \in (-1, 1)$, pues así incluso el límite de $f'(x)$ en $x=0$ será no positivo.

Veamos que $g'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, esto es menor a 0 cuando $x<0$, 0 cuando $x=0$, y mayor a 0 cuando $x>0$, luego $g(x)$ tiene mínimo (global) en $x=0$. Pero $g(0)=0$, luego $g(x) \geq 0$ y terminamos.

P6)



$$\Rightarrow L(x) = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(x-b)^2+c^2}$$

Debemos imponer $L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{(x-b)}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}} = 0$

$$\Rightarrow x\sqrt{(x-b)^2+c^2} + (x-b)\sqrt{x^2+a^2} = 0. \quad (*)$$

Elevando al cuadrado con una raiz a cada lado de la igualdad:

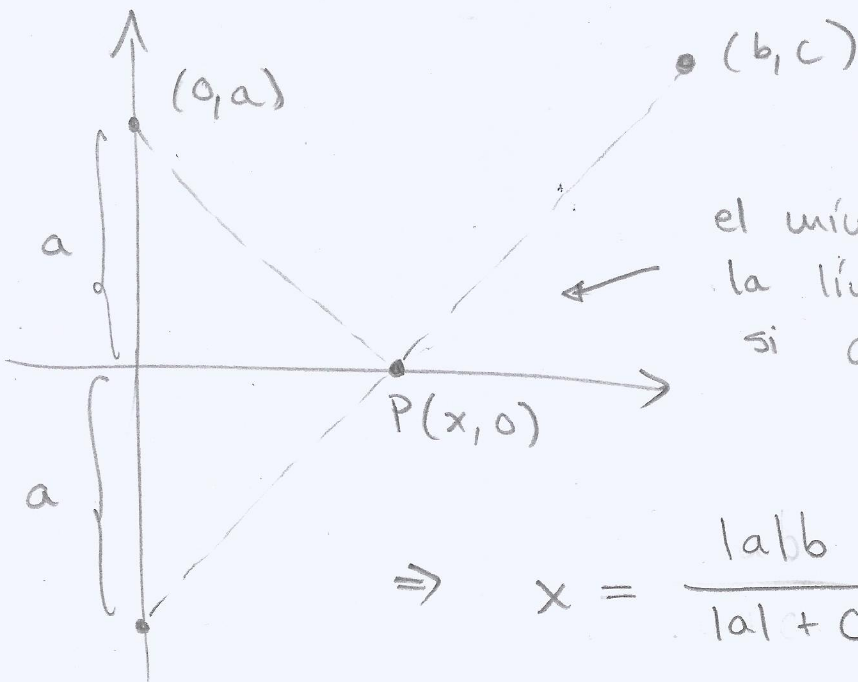
$$\Rightarrow \quad x^2\left((x-b)^2 + c^2\right) = (x-b)^2(x^2+a^2).$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{x^2(x-b)^2} + x^2c^2 = \cancel{(x-b)^2x^2} + a^2(x-b)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (xc)^2 = (a(x-b))^2 \quad \Leftrightarrow \quad xc = \pm a(x-b)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pm ab}{c \pm a}$$

Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $c > 0$ y $b > 0$ (como en el dibujo). Analizando la segunda derivada concluimos que $x = \dfrac{|a| b}{|a| + c}$ es mínimo. Otra forma de verlo es como sigue



el mínimo es la línea recta si $a<0$, $c>0$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{|a| b}{|a| + c}, \quad b, c > 0$$