MA1101-3 Introducción al Algebra.
Profesor: Marcos Kiwi
Auxiliar: Benjamín Jauregui
Fecha: 7 de junio de 2018

Tutoría Movilizada

P1.- (Lógica) Sean p, q, s proposiciones lógicas. Demuestre, sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

$$[p \implies s] \implies [(p \wedge q) \implies s]$$

P2.- (Conjuntos)

a) Demuestre que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

b) $A \cap C = \phi \implies (A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \backslash C)$ (Hint: Recuerde que $A \cap C = \phi \implies A \subseteq C^c$)

P3.- (Sumas dobles)

a) Considere la suma

$$1 + \frac{1+8}{4} + \frac{1+8+27}{9} + ... + \frac{1+8+27+...+n^3}{n^2}$$

Escriba la suma de arriba como una sumatoria doble y alcule su valor.

b) Calcule el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \left(k + \frac{2^j}{j} \right)$$

P4.- (Sumas + funciones + inducción + factorial) Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes propiedades:

$\forall x, y \in (0, \infty), f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, y $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

a) Pruebe que $f(1) = 0$ y que $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y), \forall x, y \in (0, \infty)$.

b) Demuestre, usando inducción, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n!)$, $\forall n \geq 1$.

c) Demuestre, sin usar inducción (i.e. con sumas conocidas), que:

$$\sum_{k=1}^{n} kf\left(1 + \frac{1}{k}\right) = (n+1)f(n+1) - f((n+1)!)$$

P5.- (Relación + conjuntos) Sea E un conjunto y $A \neq \phi$ un subconjunto **fijo** de E. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$X\mathcal{R}Y \iff A\backslash X = A\backslash Y$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Demuestre que el conjunto cuociente

$$\mathcal{P}(E)\backslash\mathcal{R} = \{[X]_{\mathcal{R}} \mid X \in \mathcal{P}(A)\}$$

P6.- (Relacion de euqivalencia) Se considera en el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff \exists m, n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - c = 2m \wedge b - d = 3n.$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Encuentre el conjunto cuociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \mathcal{R})$

P7.- (Inducción + suma) Demuestre usando inducción que:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^2 = (n + 1)(2n + 1)$$

P8.- (Relación) Se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$m\mathcal{R}n \iff m^2 - n^2 \text{ es múltiplo de } 3$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Determine 3 elementos de $[0]_{\mathcal{R}}$ y de $[1]_{\mathcal{R}}$.

P9.- (Suma)

a) Calcule el valor de la siguiente suma

$$\sum_{k=m^2(m-6)+1}^{m^2(m+6)} (2k - 1)$$

b) Demuestre (sin inducción) que:

$$\sum_{k=0}^{7} \left(\sqrt{3}^{7-k} \sqrt{2}^{k} \right) = 65(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

P10.- (Relación de orden) Sea $A \neq \phi$ un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en A. Se define la relación $\mathcal{R}^*$ en $A \times A$ por:

$$(a, b)\mathcal{R}^*(c, d) \iff (a\mathcal{R}c) \wedge (b\mathcal{R}d)$$

a) Demeustre que si $\mathcal{R}$ es relación de orden, $\mathcal{R}^*$ también lo es.

b) Muestre que si A tiene más de 2 elementos y $\mathcal{R}$ es de orden total, entonces $\mathcal{R}^*$ es solo de orden parcial.

c) Muestre que se $\mathcal{R}$ es de equivalencia, $\mathcal{R}^*$ también lo es.

d) Muestre que se cumple que

$$[(a, b)]_{\mathcal{R}^*} = [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{R}}$$

P11.- (Funciones) Sean A, B, C, D conjuntos no vacios tales que $A \cap C = \phi$ y $B \cap D = \phi$ y sean $f : A \to B$, $g : C \to D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \to B \cup D$, $\forall x \in A \cup C$, como:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \\ g(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

a) Demuestre que si f, g son inyectivas, h también lo es.

b) Demuestre que si f, g son epiyectivas, h también lo es.