Departamento de Ingeniería Matemática
Profesor: Marcos Kiwi
Auxiliar: Benjamín Jauregui
MA1101 - Introducción al Álgebra

Auxiliar 9

Binomial y cardinalidad

RESUMEN SEMANA 9

Definicion (Conjunto finito). *Un conjunto A es finito si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que existe una función biyectiva $f : A \to [1, ..., n]$. Si existe ese n_0, se dice que la cardinalidad del conjunto A es n_0. Esto es, $|A| = n$.*

Proposiciones. *Sean A, B conjuntos finitos.*

a) *Si $A \cap B = \phi$, $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

b) *Si $B \subseteq A$, $|A \backslash B| = |A| - |B|$. En particular, $|B| \leq |A|$.*

c) *Si $A \subseteq B \vee B \subseteq A$ y $|A| = |B|$, entonces $B = A$.*

d) *Sean $A_1, ..., A_n$ conjuntos finitos, entonces $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} |A_i|$.*

e) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Definicion. *Denotamos al conjunto de todas las funciones de A en B por:*

$$B^A = \{f : A \to B \ / \ f \text{ función}\}.$$

Propiedades (Binomial). *Para n y k enteros, $n \geq 0$.*

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Teorema (Binomio de Newton).

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Definicion (Numerable). *Un conjunto A se dice numerable si existe una función biyectiva $f : A \to \mathbb{N}$.*

Proposiciones (Numerables conocidos). *$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ son numerables, así como cualquier unión de ellos, o producto cartesiano finito.*

Propiedades (Propiedades muy útiles).

- *Unión numerable de conjuntos finitos o numerables es numerable.*
- *Sean $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ colección FINITA de conjuntos numerables, entonces ${}_{i=1}^{n} A_i$ es finito o numerable, respectivamente.*

P1.- a) Sean p y q tales que $p + q = 1$. Demuestre sin usar inducción que:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np$$

b) **(PROPUESTO)** Demuestre, sin usar inducción que:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

P2.- Sean A, B, C, conjuntos tales que $A \cap C = \phi$, $A \cap B = \phi$ y $|B| = |C|$. Demuestre que

$$|A \cup B| = |A \cup C|$$

P3.- Se define el conjunto $\mathcal{D} = \{(m, n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \mid m \cdot n \in \mathbb{Z}\}$. Demuestre que $\mathcal{D}$ es numerable.

P4.- Para un conjunto $A \neq \phi$ se define

$$\mathcal{F} := \{f : \{1, 2, 3\} \to A \mid \text{f es función}\}$$

a) Demuestre que $|F| = |A \times A \times A|$. **Hint:** Considere para cada $f \in \mathcal{F}$ la tupla $(f(1), f(2), f(3))$.

b) Muestre que si A es numerable, también lo es $\mathcal{F}$.

P5.- Se definen $M_k = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = k\}$ y $M = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{A}| < \infty\}$

a) Muestre que $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, M_k es un conjunto infinito.

b) Describa M_1 y pruebe que $|M_1| = |\mathbb{N}|$.

c) Muestre que $|M_k| \leq |\mathbb{N}^k|$ y concluya que M_k es numerable.

d) Concluya que M es numerable.