MA1101-3 Introdución al Álgebra.
Profesor: Marcos Kiwi.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 9 de agosto de 2018.

Auxiliar 12

Grupos, anillos y cuerpos.

P1.- Sea $(X, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con $X \subseteq \mathbb{R}$. En X^2 se definen las siguientes leyes de composición interna, $\forall (a, b), (c, d) \in X^2$

$$(a, b) \bigoplus (c, d) = (a + b, c + d)$$

$$(a, b) \bigotimes (c, d) = (a \cdot c, 0)$$

Sabiendo que $(X^2, \bigoplus)$ es grupo abeliano:

i) Verifique que $(X^2, \bigoplus, \bigotimes)$ es un anillo conmutativo.

ii) Investigue si $(X^2, \bigoplus, \bigotimes)$ tiene unidad y/o divisores de cero. ¿Es $(X^2, \bigoplus, \bigotimes)$ un cuerpo? Justifique.

P2.- Sea $(G, \cdot)$ un grupo finito con neutro e y sea $g \in G\backslash\{e\}$, definimos:

$$< g >:= \{g, g \cdot g, g \cdot g \cdot g, ...\}$$

Demuestre que:

i) $< g >$ es subgrupo de G.

ii) Si $|G| = 4$, entonces $g^3 \neq e$.

iii) **(Propuesto)** Si $|G| = p$ con p primo, entonces $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_p, +_p)$

P3.- Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y $(A, \bigoplus, \bigotimes)$ un anillo con unidad. Sea $f : K \to A$ una función tal que $f : (K, +) \to (A, \bigoplus)$ y $f : (K, \cdot) \to (A, \bigotimes)$ son morfismos y $f(1_k) = 1_A$ con $1_A \neq 0_A$. Pruebe que:

I) i) $f(0_K) = 0_A$.
   ii) $\forall x \in K, f(-x) = -f(x)$.
   iii) $(f(K), \bigoplus)$ es subgrupo de $(A, \bigoplus)$.

II) $f(x) = 0_A \iff x = 0_K$.

III) $f(x)$ es inyectiva.

P4.- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad, tal que |A| es finito.

a) Muestre que si $a \in A$ es divisor de cero, entonces a no es invertible.

b) Sea $x \in A$, no invertible, $x \neq 0$ (cero del anillo).
   i) Muestre que $(\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$, $x^k \neq 1$ (unidad en A).
   ii) Muestre que $\exists n, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, con $n \neq m$ tales que $x^n = x^m$.
   iii) Muestre que $(\exists r, s \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$ tales que $x^s(1 - x^r) = 0$.
   iv) Concluya que x es divisor de cero.