MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell.
Auxiliar: Juan Pedro Ross.
Fecha: Miércoles 13 de Junio

Indicaciones Guía Control 4

P1. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a+b \equiv_2 c+3d$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
Indicación: recuerde que $e \equiv_2 f \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} e-f=2k$, es decir si $e-f$ es par.

(b) Muestre que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.
Indicación: Calcule por separado cada clase de equivalencia, es decir diga algo del estilo $(a,b) \in [(0,0)] \Leftrightarrow (a,b)\mathcal{R}(0,0) \Leftrightarrow (a,b)$ cumple que... Haga lo mismo para la del $(1,0)$. Finalmente tome un $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y vea que se debe cumplir uno o lo otro.

(c) Determine $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathcal{R}$.
Indicación: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \mathcal{R}$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia, sin repetición.

P2. Dados $a, b \in \mathbb{N}$ fijos, con $a \geq 1$ y $b \geq 2$ se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow b|ax+y, \text{ es decir, } b \text{ divide a } ax+y$$

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es refleja si y sólo si $b|(a+1)$.
Indicación: Si $p|bx \ \forall x \Rightarrow p|b$ ¿Por qué? piense que x no está fijo.

(b) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $b|(a^2-1)$.
Indicación: Asuma que $x\mathcal{R}y$, eso permite despejar y, luego vea que $y\mathcal{R}x$ también se cumple reemplazando ese y, tenga presente la misma indicación que en la parte anterior.

(c) Demuestre que para $a=3$ y $b=4$, $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia y encuentre $\mathbb{Z} \setminus \mathcal{R}$
Indicación: Para el conjunto cociente, calcule las clases de equivalencia del 0,1,2,3,4,5,6,... hasta que encuentre un patrón.

P3. Sea $f : A \to B$ una función y $\mathcal{R}$ una relación de orden en B. Se define la relación Ω en A como $x\Omega y \Leftrightarrow f(x)\mathcal{R}f(y)$. Demuestre que Ω es una relación de orden en A si y solo si f es inyectiva.
Indicación: Utilice constantemente que $\mathcal{R}$ es de orden, ella cumple todo.

P4. (a) Se define en $\mathbb{R}$ la relación Ψ dada por: $x\Psi y \Leftrightarrow (y-x) \in \mathbb{N}$.

i. Demuestre que Ψ es una relación de orden.
Indicación: ¿Cuál es el único $n \in \mathbb{N}$, tal que $-n \in \mathbb{N}$?

ii. Indique si es una relación de orden parcial o total. Justifique.
Indicación: ¿La resta de dos reales siempre es un natural?

(b) Considere ahora la relación Φ definida en $\mathbb{R}$ como $x\Phi y \Leftrightarrow (y-x) \in \mathbb{Z}$.

i. Demuestre que Φ es una relación de equivalencia.

ii. Dado $p \in \mathbb{Z}$, calcule la clase de equivalencia $[p]_\Phi$.
Indicación: ¿Qué hay que restarle a p para que quede entero?, no intente describir matemáticamente el conjunto solo diga, son los x que se parecen en p así...

iii. Demuestre que $\mathbb{R}/\Phi = \{[x] : x \in [0, 1)\}$
Indicación: Utilice la parte anterior para ver que estas son todas las clases de equivalencia posible. Recuerde que para toda relación de equivalencia $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \in [y] \Leftrightarrow y \in [x]$.

P5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y).$$

Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} f(1 + \frac{1}{i}) = f(n + 1).$$

Indicación: Sume las fracciones y recuerde que $1 = 1 \cdot 1$

P6. Para $n \in \mathbb{N}$ $b, q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, calcule $1 + (1 + b)q + (1 + b + b^2)q^2 + ... + (1 + b + ... + b^n)q^n$.
Indicación: Reconozca la suma principal, y escriba la secundaria solo como un c_k.

P7. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Calcule:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(3 + (-1)^k)^k}$$

Indicación: Separe en términos pares e impares, calcule cada una por separado. Recuerde que si $2i$ va desde 2 hasta $2n$, i va desde 1 hasta n y que si $2i - 1$, va de 1 a $2n - 1$, i va de 1 a n.

P8. En esta pregunta vamos a aprender a calcular sumatorias por el método de fracciones parciales, esto es muy útil cundo tenemos sumas de fracciones que tienen multiplicaciones en el numerador, la idea es separar esa multiplicación en una resta y luego utilizar una suma telescópica o algo parecido. Para esto tendrá que creer que si $a_0+a_1j+a_2j^2+...+a_pj^p = b_0+b_1j+b_2j^2+...+b_pj^p$ cuando j se está moviendo entre varios valores, la única posibilidad es que $a_0 = b_0, a_1 = b_1, ..., a_p = b_p$ (esto lo vamos a formalizar cerca del final del curso). Veamos un mini ejemplo de como utilizar esto calculando: $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}$, impongamos que esa fracción es una suma y averigüemos como debe ser $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{A}{j} + \frac{B}{j+1} = \frac{A(j+1)+Bj}{j(j+1)} = \frac{Aj+A+Bj}{j(j+1)} = \frac{(A+B)j+A}{j(j+1)}$, imponiendo la igualdad en el numerador se llega a que $(A + B)j + A = 1$, y acá se usa lo explicado antes: igualamos todo lo con j con todo lo con j y todo el resto con todo el resto; pero no hay j a la derecha! si hay siempre hay un $0j$, así llegamos a que $A + B = 0$ y $A = 1$, por lo tanto $B = -1$. Así: $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A}{j} + \frac{B}{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Utilizando un razonamiento muy parecido al de antes calcule las siguientes sumatorias:

i) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k^2}\frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$
Indicación: imponga que $\frac{A}{n+j-1}-\frac{B}{n+j}=\frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$ y aplique lo que se explicó, considerando que n es un número fijo, y que j es lo que se está moviendo. Concluya con una telescópica.

ii) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$
Indicación: Escribalo como sumatoria, y aplique fracciones parciales para formarse una telescópica, tenga presente que si $a_k=2k-1$, es falso que $a_{k+1}=2k$ ¿Por qué?