MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliar: Juan Pedro Ross
Fecha: Domingo 1 de Julio de 2018

Guía control recuperativo

Resumen, para que vean que no han aprendido poco:

- **Conjunto potencia:** Dado A un conjunto $P(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A.

$$X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$$

Sea $f : A \to B$ una función.

- f es inyectiva $\Leftrightarrow (\forall x, y \in A)\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
- f es sobreyectiva $\Leftrightarrow (\forall y \in B)(\exists x \in A)\ f(x) = y$.
- f es biyectiva $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva.
- Si f es biyectiva, tiene inversa f^{-1}, y es tal que $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x)$.
- $g \circ f$ SOLO TIENE SENTIDO CUANDO $B \subseteq C$.
- $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow$ f inyectiva.
- $g \circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow$ g sobreyectiva.
- $g \wedge f$ inyectivas $\Rightarrow$ $f \circ g$ inyectiva.
- $g \wedge f$ sobreyectivas $\Rightarrow$ $f \circ g$ sobreyectiva.
- $g \wedge f$ biyectivas $\Rightarrow$ $f \circ g$ biyectiva con $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- Dado $A' \subseteq A$, de define el conjunto **imagen de** A' como

$$f(A') = \{y \in B \mid (\exists x \in A') f(x) = y\}.$$

- Dado $B' \subseteq B$, de define el conjunto **preimagen de** B' como

$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$

- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
- $\mathcal{R}$ es **refleja** ssi $(\forall x \in A)\ x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ es **simétrica** ssi $(\forall x, y \in A)\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ es **antisimétrica** ssi $(\forall x, y \in A)\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
- $\mathcal{R}$ es **transitiva** ssi $(\forall x, y, z \in A)\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- $\mathcal{R}$ es relación de **orden** ssi es refleja, antisimétrica y transitiva.
- $\mathcal{R}$ es relación de **equivalencia** ssi es refleja, simétrica y transitiva.
- Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden, diremos que es un **orden total** si para cada $x, y \in A$ $(x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x)$. De lo contrario, se dirá que es un **orden parcial**.
- Si $\mathcal{R}$ es de equivalencia y $x \in A$ $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$ es la **clase de equivalencia** de x asociada a $\mathcal{R}$.
- $A/\mathcal{R}$ es el conjunto de las clases de equivalencia inducidas por $\mathcal{R}$ y se le llama **conjunto cuociente**.
- Inducción **primera forma** $[(\forall n \geq n_0)p(n)] \Leftrightarrow [p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)(p(n) \Rightarrow p(n+1))]$.
- Inducción **segunda forma** $[(\forall n \geq n_0)p(n)] \Leftrightarrow [p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)\{[(\forall k, n_0 \leq k \leq n)p(k)] \Rightarrow p(n+1)\}]$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}$.
- Suma telescópica: $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k - a_{k-1} = a_q + a_{p-1}$.
- Binomio de Newton: $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
- Suma geométrica: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, si $r \neq 1$.
- $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Leftrightarrow |A| = |B|$
- $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$
- Si A es infinito, entonces $|\mathbb{N}| \leq |A|$
- $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ son numerables.
- La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.
- Si A, B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable.

P1. *(Funciones y sumatorias)* Considere las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(n) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$g(x) = x^{-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(a) Expresar $f(n)$ en función de n (resolver la suma).

(b) Verificar de $Im(g \circ f) \subseteq \mathbb{N}$. ¿Es $g \circ f$ inyectiva/ epiyectiva/ biyectiva?. Justifique.

P2. *(Funciones, inducción y conjuntos:)* Sea U conjunto universo y $A, B \subseteq U$. Se define:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(U) &\longrightarrow \mathcal{P}(U) \\ X &\longmapsto f(X) = A \cap (B \cup X) \end{aligned}$$

(I) Pruebe de $f \circ f = f$

(II) Pruebe que $(\forall n \geq 1) f^n = f$.

(III) Si $A \neq U$ o $B \neq \emptyset$, pruebe que f no es inyectiva.

(IV) Si $A \neq U$ o $B \neq \emptyset$, pruebe que f no es sobreyectiva.

(V) ¿Cómo sería f si fuese una función biyectiva?

(VI) Determine condiciones para que

$$\begin{aligned} g : \mathcal{P}(U) &\longrightarrow \mathcal{P}(U) \\ X &\longmapsto g(X) = ((A \cap B)^c \setminus (A \cap X))^c \end{aligned}$$

sea biyectiva.

P3. *(Divisibilidad e inducción:)*

a) Sea $z \in \mathbb{Z}$ demuestre, sin usar inducción, que $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $1 - z^n$ siempre es divisible por $1 - z$.

b) Sea $z \in \mathbb{Z}$ demuestre, usando inducción, que $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $1 - z^n$ siempre es divisible por $1 - z$.

c) Concluya que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y a divide a b entonces $a - b$ divide a $a^n - b^n$.

d) Demuestre que todos los números de la forma, $12, 102, 1002, \ldots$ son divisibles por 6.

P4. *(Sumatorias e inducción:)*

(a) Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k} j = \frac{n(n+1)}{4}$

(b) Demuestre usando inducción que

$$\forall n \geq 2 : \sum_{k_1=1}^{m} \frac{1}{k_1+1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2+1} \sum_{k_3=1}^{k_2} \frac{1}{k_3+1} \cdots \sum_{k_n=1}^{k_{n-1}} k_n = \frac{m(m+1)}{2^n}$$

P5. *(Inducción)* Determine el menor $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual es válida la desigualdad $3n + 2 < 2^n$.

P6. *(Relaciones, composición de funciones:)* Sea A un conjunto no vacío y $f : A \to A$ una función biyectiva. Denotaremos por f^{-1} a la inversa de f. Para $n \geq 1$ definiremos f^n como la composición de ella consigo misma n veces y si $n < 0$ definimos $f^n = (f^{-1})^{|n|}$. Si $n = 0$ ponemos $f^0 = Id_A$.

Considere la relación en A definida como: $xRy \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, f^{(n)}(x) = y$

a) Probar que R es una relación de equivalencia

b) Calcule A/R suponiendo que $A = \{0, 1, 2, ..., 2n\}$ y que

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & 0 \leq x \leq 2n-2 \\ 0 & x = 2n \\ 1 & x = 2n-1 \end{cases}$$

P7. *(Relaciones, imagen y pre-imágen)* Sea U universo y $f : U \longrightarrow U$ una función cualquiera (no necesariamente biyectiva), en $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ se definen la relaciones $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow f(f^{-1}(A)) \subseteq f(f^{-1}(B))$ y $A\mathcal{S}B \Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(f(B))$.

a) Demuestre que ambas son reflexivas y transitivas.

b) Considere $U = \{1, 2, 3\}$ y $f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 3$ y vea que ocurre con la antisimetría

c) Determine condiciones sobre f para que ambas sean de orden.