MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell
Auxiliar: Juan Pedro Ross
Fecha:

Auxiliar 10: Estructuras Algebraicas

Resumen:
Sea $(A, *)$ una estructura algebraica.

- $*$ es **asociativa** si: $(\forall x, y, z \in A)\ (x * y) * z = x * (y * z)$.
- Sea $e \in A$. Se dice que e es **elemento neutro** para $*$ si $(\forall a \in A)\ e * a = a * e = a$.
- Dado e neutro para $*$ y $x \in A$. Diremos que x tiene **inverso** si $(\exists y \in A)\ y * x = x * y = e$.
- $*$ es **conmutativa** si $(\forall x, y \in A)\ x * y = y * x$.
- $a \in A$ **absorbente** si $(\forall x \in A)\ a * x = x * a = a$
- $a \in A$ **idempotente** si $a * a = a$

P1. Estudie las propiedades (Existencia de neutro, absorbente, asociatividad y conmutatividad) de las siguientes estructuras algebraicas:

(I) $(\mathcal{P}(E), \cap)$

(II) $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \text{máx})$, donde máx es la operación de máximo entre dos elementos.

(III) $(\{Piedra,\ Papel,\ Tijera\}, \star)$, donde $\star$, entrega la que gana o empata en el cachipún.

P2. Se define en $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna $*$ por

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d).$$

(I) Estudiar la conmutatividad y asociatividad de $*$.

(II) Determine el neutro en $(\mathbb{R}^2, *)$.

(III) Determine qué elementos son invertibles para $*$ y calcule sus inversos.

(IV) Determine los elementos idempotentes en $(\mathbb{R}^2, *)$.

P3. Consideremos $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa en A. Sea $a \in A$ fijo, se define:

$$B = \{x \in A \mid a * x = x * a\}$$

Demuestre que:

(I) $(\forall x, y \in B)\ x * y \in B$.

(II) Si $e \in A$ es neutro, entonces $e \in B$.

(III) Si $x \in B$ tiene inverso x^{-1}, entonces $x^{-1} \in B$

P4. (a) Pruebe que todo intervalo de la forma (a, b) $a < b$ cumple que $|(a, b)| = |\mathbb{R}|$

(b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto infinito no numerable y sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos tales que $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i = A$. Demuestre que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que A_k es infinito no numerable.

(c) Pruebe que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ no es numerable.
Indicación: $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}$ *una cantidad numerable de veces.*

P5. Recuerde que $\binom{n}{k}$ es *"El total de subconjuntos de k elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos"*.

a) Demuestre que para cualquier conjunto finito A, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

b) Demuestre, sin usar inducción, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n < 2^n$.

P6. Demuestre, sin usar inducción, que

a) $(\forall x \neq 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(1-x)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = pn$

P7. Demuestre que el conjunto $\{\cdots, -9, -4, -1, 0, 1, 4, 9, \cdots\}$ es numerable.