P1

Pauta Aux 1

Matías
Azócar
Carvajal
23/03/2018

1.

p	q	$p \vee q$	$\overline{(p \vee q)}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Tautología

2.

p	q	$p \wedge q$	$\overline{(p \wedge q)}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Tautología

3.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \Rightarrow q$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Tautología

4.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V

Tautología

P_2 $(p \wedge q) \Rightarrow [(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)]$

¡Exploramos!

Supongamos que $p \wedge q$ es falso (esto es, p Verdadero y q Falso, p Falso y q Verdadero o bien ambos falsos). Si es así, sabemos que $F \Rightarrow r$ (sea cual sea r) es Verdadero! (Si no me creen, busquen un contraejemplo)

De modo que solo queda analizar el caso $p \wedge q \Leftrightarrow V$ (esto es, $p \Leftrightarrow V \wedge q \Leftrightarrow V$)

Si es así, el lado derecho queda:

$$[(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)]$$

$$\Leftrightarrow [(V \vee V) \Leftrightarrow (V \Leftrightarrow V)]$$

$$\Leftrightarrow [V \Leftrightarrow V]$$

$$\Leftrightarrow V$$

Verdadero! Con esto, vemos todos los casos posibles. Concluyendo que la proposición es una tautología !!

P3) $\left(\underbrace{[r \wedge \sim(p \Rightarrow q)]}_{\alpha} \wedge \sim \underbrace{[p \wedge \sim(s \Rightarrow q)]}_{\beta}\right)$

Para que un conector "$\wedge$" produzca el valor de verdad V, necesitamos que ambas componentes sean verdaderas. Entonces, si llamamos α y β a las proposiciones compuestas marcadas arriba, ambas deben ser verdaderas!

$\rightarrow [r \wedge \sim(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow V \quad \wedge$

$\rightarrow \sim[p \wedge \sim(s \Rightarrow q)] \Leftrightarrow V$ (o sea $[p \wedge \sim(s \Rightarrow q)]$ es falso)

Razonando igual que antes, mirando α nos daremos cuenta de que r es verdadera y que $\sim(p \Rightarrow q)$ también. Eso equivale a que $(p \Rightarrow q)$ es falsa. O sea que p es verdadera y q falsa (el caso falso de implicancia es $V \Rightarrow F$).

Análogamente, analizando β, p es Verdadera y $\sim(s \Rightarrow q)$ es falsa, o sea, $s \Rightarrow q$ es verdadera y, como q es falsa, forzosamente, s será Falsa. Encontrando la rpta. (recordando que si ("algo" $\Rightarrow$ F) $\Leftrightarrow$ V, "algo" es F.

$\therefore \quad p \Leftrightarrow V \qquad r \Leftrightarrow V$

$\quad\;\; q \Leftrightarrow F \qquad s \Leftrightarrow F$ //

P4

- $\left(\forall x \in E, p(x) \wedge q(x)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in E, p(x)\right) \wedge \left(\forall x \in E, q(x)\right)$

$\Rightarrow$] Sea $\bar{x} \in E$ arbitrario,

$\left(p(\bar{x}) \wedge q(\bar{x})\right) \Leftrightarrow V$

(recordemos que $[a \wedge b \Leftrightarrow V] \Leftrightarrow [a \Leftrightarrow V \wedge b \Leftrightarrow V]$)

$\Leftrightarrow \quad p(\bar{x}) \Leftrightarrow V \; \wedge \; q(\bar{x}) \Leftrightarrow V$

$\Leftrightarrow \left(\forall x \in E, p(x)\right) \wedge \left(\forall x \in E, q(x)\right)$

Como esto cumple para cualquier $\bar{x}$, se cumple para todos.

$\Leftarrow$] Sea $\bar{x} \in E$ arbitrario,

$\Rightarrow$ como $\bar{x} \in E$, $p(\bar{x}) \Leftrightarrow V \; \wedge \; q(\bar{x}) \Leftrightarrow V$

$\Rightarrow \left(p(\bar{x}) \wedge q(\bar{x})\right) \Leftrightarrow V$

Como ambas son verdaderas, su conjunción es verdadera. $(V \wedge V) \Leftrightarrow V$

$\Rightarrow \left(\forall x \in E, p(x) \wedge q(x)\right)$

De ese modo, vemos que las proposiciones son equivalentes.

Nota: (Puede ser que esto sea muy abstracto para el nivel al que están acostumbrados. Medítenlo. Denle vueltas y si les quedan dudas pregunten sin miedo)

• $(\forall x \in E, p(x) \vee q(x)) \Leftarrow\Rightarrow (\forall x \in E, p(x)) \vee (\forall x \in E, q(x))$

$\Leftarrow\Rightarrow$] Veamos intuitivamente que el que todos cumplan uno u otro no es lo mismo que que todos cumplan exactamente la misma proposición p o q.

Ej: Sea p: "ser par" y q: "ser impar" en los naturales (1, 2, ..., 87, ...) todos los números son pares o son impares $(\forall x, p(x) \vee q(x))$. Sin embargo, NO son TODOS pares o TODOS impares

esto es:

$(\forall x, p(x)) \Leftarrow\Rightarrow F \quad \wedge \quad (\forall x, q(x)) \Leftarrow\Rightarrow F$

de ese modo llegamos a $V \Leftarrow\Rightarrow F$, lo cual es evidentemente FALSO.

P5

$$\overline{\forall x(\exists y((p(x)\Rightarrow q(y))))}$$

$$\Leftrightarrow \exists x(\overline{\exists y((p(x)\Rightarrow q(y)))})$$

$$\Leftrightarrow \exists x(\forall y(\overline{(p(x)\Rightarrow q(y))}))$$

$$\Leftrightarrow \exists x(\forall y(\overline{(\overline{p(x)}\vee q(y))}))$$ Caracterización de implicancia

$$\Leftrightarrow \exists x(\forall y((\overline{\overline{p(x)}}\wedge \overline{q(y)})))$$ De Morgan

$$\Leftrightarrow \exists x(\forall y(p(x)\wedge \overline{q(y)})))$$ Doble Negación

P6

• $(\sim p \spadesuit q)\vee(q\spadesuit p)$

$\Leftrightarrow (\sim q\wedge \overline{\overline{p}})\vee(\overline{p}\wedge\overline{q})$

$\Leftrightarrow (\overline{q}\wedge p)\vee(\overline{q}\wedge\overline{p})$

$\Leftrightarrow (\overline{q}\wedge\underbrace{(p\vee\overline{p})}_{V})$

$\Leftrightarrow (\overline{q})$

no es equivalente a $p\Leftrightarrow q$!!

• $(\sim p\spadesuit q)\vee(\sim q\spadesuit p)$

$\Leftrightarrow (\overline{q}\wedge\overline{\overline{p}})\vee(\overline{p}\wedge\overline{\overline{q}})$

$\Leftrightarrow (p\wedge\overline{q})\vee(\overline{p}\wedge q)$

$\Leftrightarrow [(p\wedge\overline{q})\vee\overline{p}]\wedge[(p\wedge\overline{q})\vee q]$

$\Leftrightarrow [\underbrace{(p\vee\overline{p})}_{V}\wedge(\overline{q}\vee\overline{p})]\wedge[(p\vee q)\wedge\underbrace{(\overline{q}\vee q)}_{V}]$

$\Leftrightarrow (\overline{p}\vee\overline{q})\wedge(p\vee q)$

Veamos que no es equivalente pues si $p\Leftrightarrow V \wedge q\Leftrightarrow V$, $(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow V$, pero $(\overline{p}\vee\overline{q})\wedge(p\vee q)$ es falsa !!

• $(\sim p \spadesuit \sim q) \vee (p \spadesuit q)$

$\iff (\bar{\bar{q}} \wedge \bar{\bar{p}}) \vee (\bar{q} \wedge \bar{p})$

$\iff (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

$\iff [(p \wedge q) \vee \bar{p}] \wedge [(p \wedge q) \vee \bar{q}]$

$\iff [\underbrace{(p \vee \bar{p})}_{V} \wedge (q \vee \bar{p})] \wedge [(p \vee \bar{q}) \wedge \underbrace{(q \vee \bar{q})}_{V}]$

$\iff [(q \vee \bar{p})] \wedge [(p \vee \bar{q})]$

$\iff [\bar{p} \vee q] \wedge [\bar{q} \vee p]$

$\iff [p \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow p]$

$\iff p \iff q$

La tercera sí es equivalente !!