MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Pauta Auxiliar 2

31 de Marzo de 2018

P1. Demuestre, por inducción, que:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 \ ,\forall n\in\{1,2,3,\ldots\}$$

Demostración: Caso base: $p(1)$

$$1=1^2=1$$

Como esto es cierto, tenemos nuestro caso base. Ahora, la hipótesis inductiva es que para cierto n

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2}_{\text{Hipótesis Inductiva}}$$

Paso inductivo: $p(n+1)$
Empezando desde la hipótesis inductiva, queremos llegar al resultado expuesto en el enunciado, cambiando cada n por un (n+1), o sea:

$$1+3+5+\ldots+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$$

Comenzamos en la hipótesis inductiva:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

Sumando $(2(n+1)-1)$ a ambos lados

$$1+3+5+\ldots+(2(n+1)-1)=n^2+(2(n+1)-1)$$

Desarrollamos el lado derecho

$$1+3+5+\ldots+(2(n+1)-1)=n^2+2n+2-1$$

$$1+3+5+\ldots+(2(n+1)-1)=n^2+2n+1$$

Factorizamos el lado derecho

$$1+3+5+\ldots+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$$

y esto es justamente lo que buscábamos. Concluyendo la demostración.

P2. Se define la siguiente recursión:

$$a_1=\frac{1}{1\cdot 2},\ a_{n+1}=a_n\cdot\frac{n}{n+2}$$

Demuestre, por inducción, que:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n}{n+1}\ ,\forall n\in\{1,2,3,\ldots\}$$

Demostración:

Primero, veamos cómo son (más o menos) los términos de esta recurrencia:

$$a_1=\frac{1}{1\cdot 2}$$

$$a_2 = \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2\cdot 3}$$
$$a_3 = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{3\cdot 4}$$

Nos damos cuenta entonces de que cualquier término de la recursión puede ser escrito como (**)

$$a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

Ahora, resolveremos el problema!
Caso base: $p(1)$

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}$$

Como esto es cierto, tenemos nuestro caso base. Ahora, la hipótesis inductiva es que para cierto n

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{n+1}}_{\text{Hipótesis Inductiva}}$$

Lo cual es equivalente a

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}}_{\text{Hipótesis Inductiva}}$$

Paso inductivo: $p(n+1)$
Empezando desde la hipótesis inductiva, queremos llegar al resultado expuesto en el enunciado, cambiando cada n por un (n+1), o sea:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1}$$

Comenzamos en la hipótesis inductiva:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Sumando $\dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$ a ambos lados

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$$

Factorizaremos el lado derecho

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)} = \frac{n+(\frac{1}{n+2})}{n+1}$$

Desarrollamos un poco

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+2)(n+1)}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+1)}$$

Simplificando

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)}=\frac{n+1}{n+2}$$

y esto es justamente lo que buscábamos. Concluyendo la demostración.

(Sería correcto demostrar el porqué de esa afirmación (**). Pueden hacerlo por inducción, se los dejo propuesto)

P3. Demuestre, por inducción, que:

$$5^{2n+1}+2^{2n+1} \text{ es divisible por } 7\ ,\forall n\geq 0$$

Demostración: Antes de desarrollar esta demostración, quiero hacer una breve descripción de "qué es ser divisible por un número"
Si a es divisible por b (también puede ser escrito como $b|a$ o "b divide a a") significa que podemos establecer la siguiente igualdad:

$$a=b\cdot x$$

Siendo x un entero cualquiera. Esto quiere decir que puedo escribir a como un producto entre el número que lo divide y otro entero.
Por ejemplo, 18 es divisible por 3 y lo puedo escribir como

$$18=3\cdot 6$$

y 6 es entero.
Aclarado esto, procedemos. Caso base: $p(1)$

$$5^{2\cdot 0+1}+2^{2\cdot 0+1}=5^1+2^1=7$$

Y 7 es divisible por 7, tenemos nuestro caso base. Ahora, la hipótesis inductiva es que para cierto n

$$\underbrace{5^{2n+1}+2^{2n+1} \text{ es divisible por } 7}_{\text{Hipótesis Inductiva}}$$

Paso inductivo: $p(n+1)$ Empezando desde la hipótesis inductiva, queremos llegar al resultado expuesto en el enunciado, cambiando cada n por un (n+1), o sea:

$$5^{2(n+1)+1}+2^{2(n+1)+1} \text{ es divisible por } 7$$

Comenzamos en la hipótesis inductiva:

$$5^{2n+1}+2^{2n+1} \text{ es divisible por } 7$$

Fijémonos en lo que queremos armar. En este caso, necesitamos que el 5 y el 2 ganen 2 unidades de exponente (para llegar al exponente (2(n+1)+1)). Tenemos dos alternativas!
Multiplicamos por 5^2+2^2 o multiplicamos por $(5+2)^2$, veamos si alguno de los caminos nos ayuda. Tomaremos el primero :)

$$(5^{2n+1}+2^{2n+1})\cdot(5^2+2^2)$$

$$5^{2n+3}+2^2\cdot 5^{2n+1}+5^2\cdot 2^{2n+1}+2^{2n+3}$$

$$5^{2n+3}+2^{2n+3}+4\cdot 5^{2n+1}+25\cdot 2^{2n+1}$$

$$5^{2n+3}+2^{2n+3}+4\cdot 5^{2n+1}+(21+4)\cdot 2^{2n+1}$$

$$5^{2n+3}+2^{2n+3}+4\cdot 5^{2n+1}+4\cdot 2^{2n+1}+21\cdot 2^{2n+1}$$

$$5^{2n+3}+2^{2n+3}+\underbrace{4\cdot(5^{2n+1}+2^{2n+1})}_{\text{Es divisible por 7 por H.I.}}+\underbrace{21\cdot 2^{2n+1}}_{\text{Es divisible por 7}}$$

$$5^{2n+3} + 2^{2n+3} + 7 \cdot x + 7 \cdot y$$

Vemos que como todo esto es divisible por 7, tiene que poderse escribir como $7 \cdot z$ con z algún entero. Haciendo eso:

$$5^{2n+3} + 2^{2n+3} + 7 \cdot x + 7 \cdot y = 7 \cdot z$$

$$5^{2n+3} + 2^{2n+3} = 7 \cdot z - 7 \cdot x - 7 \cdot y$$

$$5^{2n+3} + 2^{2n+3} = 7 \cdot (z - x - y)$$

Vemos que $5^{2n+3}+2^{2n+3}$ es divisible por 7, que es lo que queríamos demostrar. La explicación es que, como el producto en su totalidad TIENE que ser divisible por 7 (porque multiplicamos $5^{2n+1} + 2^{2n+1}$ por otra cosa y ya sabíamos que era divisible por 7) vemos que como todo el resto de sumandos que no son $5^{2n+3} + 2^{2n+3}$ son divisibles por 7, $5^{2n+3} + 2^{2n+3}$ DEBE ser divisible por 7. Llegando entonces justamente a lo que queríamos demostrar. Concluyendo la demostración.

P4. Demuestre, por inducción sobre n, que (con $p \in \{1, 2, \ldots\}$ un valor fijo):

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+p-1) \text{ es divisible por } p, \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Demostración:

Caso base: $p(1)$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (1+p-1)$$

Es fácil ver que el último factor es justamente p, de modo que el producto completo es divisible por p. Teniendo el caso base, buscaremos comprobar el paso inductivo.

$$\underbrace{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+p-1) \text{ es divisible por } p,}_{\text{Hipótesis Inductiva}}$$

Paso inductivo: $p(n+1)$ Buscaremos corroborar que se tiene que

$$(n+1) \cdot ((n+1)+1) \cdot ((n+1)+2) \cdot \ldots \cdot ((n+1)+p-1) \text{ es divisible por } p$$

Veamos lo que pasa desde nuestra hipótesis inductiva:

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+p-1) \text{ es divisible por } p$$

Tenemos dos casos importantes:

1. n es divisible por p
   Si este fuera el caso, entonces al intentar demostrar el paso inductivo $p(n+1)$ estaríamos quitando el factor que permite que nuestra demostración exista (o sea, nuestros términos ya no serían divisibles por p) Sin embargo, veamos que al agregar el término $n+1+p-1$, estamos agregando un término divisible por p. Si n es divisible por p, entonces

   $$n = p \cdot x$$

   Con x algún entero. Entonces

   $$n + 1 + p - 1 = n + p = p \cdot x + p = p \cdot (x+1)$$

   Vemos que $n+1+p-1$ se puede escribir como $p \cdot (x+1)$. Es decir, es divisible por p. Por lo que p(n+1) se cumple! (El nuevo producto sigue siendo divisible por p)

2. n no es divisible por p
   Si se tiene este caso, entonces al continuar al paso inductivo. El factor que otorga la divisibilidad por p sigue dentro de nuestros términos en la multiplicación. O sea, sigue siendo divisible por p.

De esta forma, vemos que $(n+1) \cdot (n+2) + \ldots + (n+p)$ es divisible por p.
Llegando a lo que buscábamos, concluyendo la demostración.

P5. Demuestre, por inducción, que:

$$2n^3 - 3n^2 + n \text{ es divisible por } 6, \forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Demostración: Caso base: $p(0)$

$$2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 0 = 0$$

Y 0 es divisible por 6, por lo que tenemos nuestra hipótesis inductiva.

$$2n^3 - 3n^2 + n \text{ es divisible por } 6$$

Paso inductivo: $p(n+1)$
Buscamos entonces ver que

$$2(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + (n+1) \text{ es divisible por } 6$$

Es cierta.
En este caso, les voy a enseñar un arma de doble filo. Hacer trampa.
Si ustedes comienzan desde el lugar a donde quieren llegar, pueden "identificar" qué cosas les son útiles para completar su demostración. (LUEGO REESCRIBEN EN EL ORDEN CORRECTO, ESTO ES, DESDE HIPÓTESIS INDUCTIVA A LO QUE QUIEREN LLEGAR. SI NO LO HACEN, ESTÁ MALO)
Entonces, tomaremos $p(n+1)$

$$2(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + (n+1)$$

$$2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3(n^2 + 2n + 1) + (n+1)$$

$$\underbrace{2n^3}_{\text{tomamos este}} + 6n^2 + 6n + 2 \underbrace{-3n^2}_{\text{este}} - 6n - 3 \underbrace{+n}_{\text{y este}} + 1$$

$$\underbrace{2n^3 - 3n^2 + n}_{\text{los juntamos aquí, porque es la hipótesis inductiva}} \qquad +6n^2 + 6n + 2 - 6n - 3 + 1$$

$$2n^3 - 3n^2 + n + 6n^2 + 6n + 6n$$

$$\underbrace{2n^3 - 3n^2 + n}_{\text{divisible por H.I.}} + \underbrace{6(n^2 + 2n)}_{\text{divisible por 6}}$$

Entonces ahora, al reescribir la demostración, decimos *"Si la hipótesis inductiva nos dice que estos términos ya son divisibles por 6, entonces, al sumarle otra cosa divisible por 6, todo sigue siendo múltiplo de 6."* Y ahí le agregan esa cosita que los deja llegar hasta completar el paso inductivo. Este método es espectacular, porque los ayuda a encontrar las cosas que les faltan (y que intuitivamente pueden ser difíciles de encontrar).
Recuerden borrar el proceso malo y entregan solo desde la hipotesis inductiva al paso inductivo. Por favor :(

P6. Demuestre, por inducción, que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \ , \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Demostración: Caso base: $p(1)$

$$1 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2 = 1$$

Como esto es cierto, tenemos nuestro caso base. Ahora, la hipótesis inductiva es que para cierto n

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2 \cdot (n+1)^2}_{\text{Hipótesis Inductiva}}$$

Paso inductivo: $p(n+1)$
Empezando desde la hipótesis inductiva, queremos llegar al resultado expuesto en el enunciado, cambiando cada n por un (n+1), o sea:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\frac{1}{4}(n+1)^2\cdot((n+1)+1)^2$$

Comenzamos en la hipótesis inductiva:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2\cdot(n+1)^2$$

Sumando $(n+1)^3$ a ambos lados

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\frac{1}{4}n^2\cdot(n+1)^2+(n+1)^3$$

Factorizaremos el lado derecho

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=(\frac{n^2}{4}+(n+1))\cdot(n+1)^2$$

Desarrollamos un poco

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=(\frac{n^2+4n+4}{4})\cdot(n+1)^2$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=(\frac{(n+2)^2}{4})\cdot(n+1)^2$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\frac{1}{4}\cdot(n+2)^2(n+1)^2$$

Reordenando por conmutatividad

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\frac{1}{4}\cdot(n+1)^2(n+2)^2$$

y esto es justamente lo que buscábamos. Concluyendo la demostración.

P7. Demuestre, por inducción, que:

$$1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots n\cdot 3^n=\frac{3}{4}[(2n-1)\cdot 3^n+1]\ ,\forall n\in\{1,2,3,\ldots\}$$

Demostración: Caso base: p(1)

$$1\cdot 3=\frac{3}{4}[(2\cdot 1-1)\cdot 3^1+1]=3$$

Como esto es cierto, tenemos nuestro caso base. Ahora, la hipótesis inductiva es que para cierto n

$$\underbrace{1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots n\cdot 3^n=\frac{3}{4}[(2n-1)\cdot 3^n+1]}_{\text{Hipótesis Inductiva}}$$

Paso inductivo: $p(n+1)$ Empezando desde la hipótesis inductiva, queremos llegar al resultado expuesto en el enunciado, cambiando cada n por un (n+1), o sea:

$$1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots(n+1)\cdot 3^{n+1}=\frac{3}{4}[(2(n+1)-1)\cdot 3^{n+1}+1]$$

Comenzamos en la hipótesis inductiva:

$$1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots n\cdot 3^n=\frac{3}{4}[(2n-1)\cdot 3^n+1]$$

Sumando $(n+1)\cdot 3^{n+1}$ a ambos lados

$$1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots(n+1)\cdot 3^{n+1}=\frac{3}{4}[(2n-1)\cdot 3^n+1]+(n+1)3^{n+1}$$

Factorizaremos el lado derecho

$$1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots(n+1)\cdot 3^{n+1}=3\frac{[(2n-1)\cdot 3^n+1]+4(n+1)3^n}{4}$$

Desarrollamos un poco

$$1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots(n+1)\cdot 3^{n+1}=3\frac{3^n(2n-1+(4n+4))+1}{4}$$

$$1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots(n+1)\cdot 3^{n+1}=3\frac{3^n(6n+3)+1}{4}$$

$$1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots(n+1)\cdot 3^{n+1}=3\frac{3^n\cdot 3(2n+1)+1}{4}$$

$$1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots(n+1)\cdot 3^{n+1}=3\frac{3^{n+1}(2(n+1)-1)+1}{4}$$

$$1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ldots(n+1)\cdot 3^{n+1}=\frac{3}{4}3^{n+1}(2(n+1)-1)+1$$

y esto es justamente lo que buscábamos. Concluyendo la demostración.

Queda pendiente la demostración de la $P8$., estoy un poco enfermo. Intentaré subirla mañana, pero no puedo prometer nada. Saludos y ánimo con el estudio!