MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Pauta Auxiliar 3 : Conjuntos

8 de abril de 2018

P1. Sean A, B, C, D conjuntos. Demuestre que:

1. $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$.
   Demostración:
   Podemos aplicar una distribución inversa:
   $(A \cup B) \cap (A \cup B^c)$
   $= A \cup \underbrace{(B \cap B^c)}_{\emptyset}$
   $= A$
2. $(A \cap B^c) \cup A = A$
   Demostración:
   $\underbrace{(A \cap B^c)}_{\subseteq A} \cup A$
   Veamos que como $A \cap B^c$ está contenido en A, al unírselo no le estamos agregando nada nuevo. Dejándolo exactamente igual.
3. $(B \setminus A) \subseteq C \Leftrightarrow C^c \subseteq (B^c \cup A)$
   Demostración:
   Aplicando la propiedad $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A$ es directo :).
4. $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A] = A \cup B$
   Demostración:
   Recordemos que $A \setminus B = A \cap B^c$
   $= [A \setminus (B \setminus A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A]$
   $= [A \setminus (B \cap A^c)] \cup [(B \setminus A) \cap A^c]$
   $= [A \cap (B \cap A^c)^c] \cup [(B \cap A^c) \cap A^c]$
   Por leyes de De Morgan y recordando que $\cap$ *asocia:*
   $= [A \cap (B^c \cup A)] \cup [B \cap \underbrace{(A^c \cap A^c)}_{A^c}]$
   $= [(A \cap B^c) \cup \underbrace{(A \cap A)}_{A}] \cup [B \cap \underbrace{(A^c \cap A^c)}_{A^c}]$
   $= \underbrace{[(A \cap B^c) \cup A]}_{A} \cup [B \cap A^c]$
   $= A \cup [B \cap A^c]$
   $= (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cup A^c)}_{E}]$
   $= \underbrace{(A \cup B)}_{\subseteq E} \cap E$
   $= A \cup B$
5. $(A \triangle B) \cup (A^c \cap B^c)^c = A \cup B$
   Demostración:
   Utilizando ley de De Morgan y la definición de la Diferencia Simétrica, el resultado es muy rápido.
   $= \underbrace{[(A \cup B) \setminus (A \cap B)]}_{\subseteq (A \cup B)} \cup (A \cup B) = (A \cup B)$
6. $A \subseteq A^c \Rightarrow A = \phi$
   Demostración:

Es directo si aplicamos intersección por A a ambos lados $A \subseteq A^c$
$\Rightarrow \underbrace{A \cap A}_{A} \subseteq \underbrace{A^c \cap A}_{\emptyset}$
$\Rightarrow A \subseteq \emptyset$
Pero recordemos que para que un conjunto esté contenido en el vacío, este solo puede ser el conjunto vacío. (Demostrarlo es ver la inclusión en ambos sentidos. Vean que la inclusión que falta siempre se tiene como propiedad.)
$\Rightarrow A = \emptyset$

P2. Sean A, B, C tres conjuntos (no vacíos) del conjunto universo E. Demuestre que:

$$(A \cap B \cap C) \cup (A^c \cup B^c \cup C^c) = E$$

· *Desafío: Generalícelo por inducción para n conjuntos.*

Demostración
Por leyes de De Morgan, es directo concluir el resultado.
$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)^c$
$= E$

P3. Sean A,B y C conjuntos con A, B, C cualesquiera, demuestre:

a) $A \triangle B = A \triangle C \Rightarrow B = C$
*Nota: La implicancia a la izquierda siempre se tiene, pero es más interesante ver la implicancia a la derecha. Es también llamada **Propiedad Cancelativa.***
Demostración:
La Diferencia Simétrica es un operador muy interesante.
- $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ (Asocia)
- $A \triangle B = B \triangle A)$ (Conmuta)
- $A \triangle \emptyset = A$
- $A \triangle A = \emptyset$
- $A \triangle E = A^c$
- $A \triangle A^c = E$

Les dejo propuesto ver que estas propiedades se cumplen.
Ahora, volviendo al problema, aplicando $A\triangle$ a la igualdad inicial por la izquierda se puede llegar al resultado buscado.
$A \triangle (A \triangle B) = A \triangle (A \triangle C)$
$(A \triangle A) \triangle B) = (A \triangle A) \triangle C$
$\emptyset \triangle B = \emptyset \triangle C$
$B = C$

b) Use lo anterior para probar que:

$$B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \Leftrightarrow A = \emptyset$$

Demostración:
Veamos el ladito de la derecha, fijémonos que <u>convenientemente</u> (jiji) es la definición de Diferencia Simétrica. El problema entonces es equivalente a:
$B = A \triangle B \Leftrightarrow A = \emptyset$
echando un ojito a las propiedades interesantes de la diferencia simétrica (y mirando el problema anterior) intuitivamente tenemos que fijarnos en que $B = \emptyset \triangle B$
$\emptyset \triangle B = A \triangle B$
Por Propiedad Cancelativa:
$\Rightarrow A = \emptyset$. La demostración para el lado izquierdo es directa.

c) Sea $A \subseteq E$, con A fijo. Use a) para probar que $\forall X, Y \subseteq E$ se tiene:

$$(X \cup A) = (Y \cup A) \wedge (X \cap A) = (Y \cap A) \Rightarrow X = Y$$

Demostración:
Recordemos que otra forma de escribir la Diferencia Simétrica es a través de la unión y la intersección.
$A \triangle X = (A \cup X) \setminus (A \cap X)$
Sabemos que $A \cup X = A \cup Y$
$= (A \cup Y) \setminus (A \cap X)$
Además, sabemos que $A \cap X = A \cap Y$
$= (A \cup Y) \setminus (A \cap Y)$
$= A \triangle Y$
Veamos que, por Propiedad Cancelativa, se llega a lo pedido :).

P4. a) Sean A, B dos conjuntos no vacíos. Demuestre que

$$A \cap B = \phi \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus B = A$$

Demostración:
$\Rightarrow$
Veamos que $(A \cup B) \setminus B$ puede ser escrito como:
$= (A \cup B) \cap B^c$
$= (A \cap B^c) \cup \underbrace{(B \cap B^c)}_{\emptyset}$
$= A \cap B^c$
Habiendo llegado hasta aquí, nos gustaría que $A \cap B^c$ fuera justamente A. Veamos que es así.
p.d.q. $A \cap B^c = A$
$\subseteq$ Directo
$\supseteq$ Sea x en A, supongamos que x está en B. Si fuera así, $x \in A \cap B$, pero eso significaría que $A \cap B \neq \emptyset$. Así, $x \in B^c$. Luego, $x \in A \cap B^c$ que era justo lo que queríamos demostrar.
$\Leftarrow$
Vemos de la demostración anterior que:

$$(A \cup B) \setminus B = A \cap B^c$$

Además, ahora nos dan como hipótesis que $A \cap B^c = A$. Veamos que $A \cap B = \emptyset$ Supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces, sea $x \in A \cap B$. De esa forma, sabemos que $x \in A \cap B \subseteq A$, es decir, $x \in A$. Pero sabemos que $x \in A \cap B \Rightarrow A \notin A \cap B^c$ (compruebenlo, no debería tomarles mucho tiempo). Pero eso quiere decir que $x \in A \wedge x \notin A \cap B^c$, pero $A \cap B^c = A$. Vemos que $x \in A \wedge x \notin A$. Eso solo puede darse si $A = \emptyset$. Para concluir, veamos que $\emptyset \cap B = \emptyset$. Demostrando lo que necesitabamos.

b) Sean A, B dos conjuntos no vacíos. Encuentre un conjunto X que verifique las siguientes ecuaciones:

$$A \cup X = A \cup B \wedge A \cap X = \phi$$

Demostración:
Busquemos una solución al ojo:
Por la pregunta anterior, veamos que como $A \cap X = \emptyset$ entonces tenemos $(X \cup A) \setminus A = X$. Además, queremos que $A \cup X = A \cup B$. Desarrollando la expresión anterior, tenemos.

$$(X \cup A) \setminus A = X$$

$$(B \cup A) \setminus A = X$$

Intuitivamente nuestro X debería ser $(B \cup A) \setminus A$. (Por la pregunta anterior, también sabemos que este último es $B \setminus A$.)
Ahora, veamos que es respuesta.

$A \cup (B \setminus A)$
$(A \cup B) \cap (A \cup A^c)$
$A \cup B$

Y además, no es difícil ver que $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$
$A \cap (B \cap A^c)$
$(A \cap A^c) \cap B$
$\emptyset \cap B$
$\emptyset$

Demostrando que $X = B \setminus A$ es solución.

c) ¿La solución que encontró es única?
Veamos que, en efecto, la solución es única.
Supóngase que hayan dos conjuntos que solucionen el problema, $X_1,\ X_2$. Luego, veamos que son iguales (o sea, que de haber dos soluciones, serían la misma).
Utilizando la primera parte, como $A \cap X = \emptyset$, tenemos:

$$X_1 = (X_1 \cup A) \setminus A = (B \cup A) \setminus A$$
$$X_2 = (X_2 \cup A) \setminus A = (B \cup A) \setminus A$$

Con esto, podemos ver que $X_1 = X_2$. De ese modo, la solución es única.

P5. (Demostración control)
Caso base: n=1.

$$p_1 \Rightarrow q \Leftrightarrow p_1 \Rightarrow q$$

Como tenemos el caso base, tenemos nuestra H.I. Hipótesis inductiva: Para cierto n, tenemos:

$$p_n \Rightarrow (p_{n-1} \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (p_1 \Rightarrow q)\ldots) \Leftrightarrow (p_n \wedge p_{n-1} \wedge \ldots \wedge p_1) \Rightarrow q$$

Demostraremos el caso $n+1$
Paso inductivo: $n+1$
Veamos que podemos escribir lo siguiente a partir de nuestra H.I.

$$p_{n+1} \Rightarrow (p_n \Rightarrow \ldots \Rightarrow (p_1 \Rightarrow q)\ldots) \Leftrightarrow p_{n+1} \Rightarrow (p_n \wedge p_{n-1} \wedge \ldots \wedge p_1) \Rightarrow q$$

Trabajaremos el lado derecho. Por caracterización de la implicancia:

$$Ladoderecho = \overline{p_{n+1}} \vee (p_n \wedge p_{n-1} \wedge \ldots \wedge p_1) \Rightarrow q$$

$$= \overline{p_{n+1}} \vee \overline{p_n} \vee \overline{p_{n-1}} \vee \ldots \vee \overline{p_1} \vee q$$
$$= \overline{p_{n+1} \wedge p_n \wedge \ldots \wedge p_1} \vee q$$
$$= (p_{n+1} \wedge p_n \wedge \ldots \wedge p_1) \Rightarrow q$$

Llegando a lo que queríamos demostrar, concluyendo por inducción.

Recuerden, cualquier duda por el foro! Ánimo, les subiré una mini-guía pronto, saludos y buen fin de semana!