MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 3 : Conjuntos

6 de Abril de 2018

Recordemos algunas cosas vistas en las cátedras de conjuntos

Conjunto vacío: ϕ
Conjunto que *no* posee elementos.

Conjunto de Referencia: E
Conjunto que posee a *todos* los elementos. (A veces podría ser $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$)

Igualdad de conjuntos: $A = B$
A es igual a B ssi tienen exactamente los mismos elementos.

Inclusión de un conjunto en otro: $A \subseteq B$
A está contenido en B ssi un elemento está en A implica que está en B.

Unión de conjuntos: $A \cup B$
Es el conjunto de todos los elementos que están solo en A, solo en B o bien, están en ambos simultáneamente.

Intersección de conjuntos: $A \cap B$
Es el conjunto de todos los elementos que están en A y, además, en B.

Complemento de un conjunto: A^c
Es el conjunto de todos los elementos que no están en A.

Resta de conjuntos: $A \setminus B$
Es el conjunto de todos los elementos que están en A y que además no están en B.

Diferencia simétrica: $A \triangle B$
Es el conjunto formado por los elementos que están solo en A o están solo en B.

Algunas propiedades útiles:

$\cdot A \subseteq A$
$\cdot A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Longleftrightarrow A = B$
$\cdot(\forall A, B$ conjuntos) se tiene $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
$\cdot A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
$\cdot(\forall A$, conjunto) se tiene $\phi \subseteq A$
$\cdot(\forall A$, conjunto) se tiene $A \subseteq E$
$\cdot(A \setminus B) = A \cap B^c$
$\cdot(A \triangle B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
$\cdot(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$; $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$\cdot(A^c)^c = A$

P1. Sean A, B, C, D conjuntos. Demuestre que:

1. $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$.
2. $(A \cap B^c) \cup A = A$
3. $(B \setminus A) \subseteq C \Leftrightarrow C^c \subseteq (B^c \cup A)$
4. $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A] = A \cup B$
5. $(A \triangle B) \cup (A^c \cap B^c)^c = A \cup B$
6. $A \subseteq A^c \Rightarrow A = \phi$

P2. Sean A, B, C tres conjuntos (no vacíos) del conjunto universo E. Demuestre que:

$$(A \cap B \cap C) \cup (A^c \cup B^c \cup C^c) = E$$

· *Desafío: Generalícelo por inducción para n conjuntos.*

P3. Sean A,B y C conjuntos con A, B, C cualesquiera, demuestre:

a) $A \triangle B = A \triangle C \Rightarrow B = C$

b) Use lo anterior para probar que:

$$B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \Leftrightarrow A = \phi$$

c) Sea $A \subseteq E$, con A fijo. Use a) para probar que $\forall X, Y \subseteq E$ se tiene:

$$(X \cup A) = (Y \cup A) \wedge (X \cap A) = (Y \cap A) \Rightarrow X = Y$$

P4. a) Sean A, B dos conjuntos no vacíos. Demuestre que

$$A \cap B = \phi \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus B = A$$

b) Sean A, B dos conjuntos no vacíos. Encuentre un conjunto X que verifique las siguientes ecuaciones:

$$A \cup X = A \cup B \wedge A \cap X = \phi$$

c) ¿La solución que encontró es única?

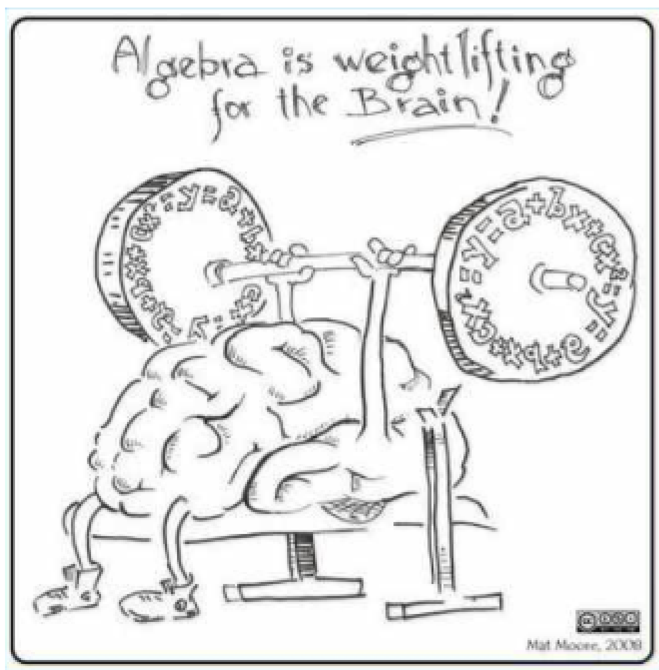

Figura 1: Ánimo! El control uno ya pasó. Ahora a prepararse para el que viene :)