MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 4 : Conjuntos v2 y Funciones

13 de Abril de 2018

Recordemos algunas cosas vistas en cátedra

Familia de Conjuntos: Es un conjunto, cuyos elementos son otros conjuntos. (En realidad una familia es un conjunto. Sin embargo, decimos familia para que no parezca confuso decir "conjunto de conjuntos").
La familia de los $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es (por extensión) la familia:

$$\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$$

Conjunto Potencia (O Partes de un Conjunto): $\mathcal{P}(A)$ es una *familia* que contiene a TODOS los subconjuntos de A.

$$\mathcal{P}(A) := \{B : B \subseteq A\}$$

e.g. $A = \{1,2\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$

Producto Cartesiano: Entenderemos el producto cartesiano (entre dos conjuntos), denotado por $A \times B$, como 2-tuplas (esto es, un par ordenado) de la siguiente forma:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Esta intuición se puede generalizar para n conjuntos.

Este producto se define usualmente como:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots A}_{n \text{ veces}}$$

Observación: En general $A \times B \neq B \times A$

Partición de un Conjunto A: Una *partición* $\mathcal{G}$ de un conjunto A es una *familia* $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ de conjuntos que cumplen lo siguiente:

- $A_i \neq \emptyset,\ \forall i \in I$
- $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$
- $\bigcup_{i\in I} A_i = A$ (Se dice que la partición *"cubre"* a A)

En otras palabras es "hacerle cortes" al conjunto A.
e.g. una partición válida para $\mathbb{N}$ es $\{Pares, Impares\}$, no es difícil ver que se cumplen las tres propiedades antes mencionadas.

Algunas propiedades útiles:

- $\forall A : \emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- $\forall A : A \in \mathcal{P}(A)$
- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

P1. [**Warm-up**] Sean $A = \{1,2\},\ B = \emptyset$. Encuentre los siguientes conjuntos:

- $\mathcal{P}(A)$
- $\mathcal{P}(B)$
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(B)))$
- $A \times B$
- $A \times \mathcal{P}(A)$

P2. Sea E el conjunto de referencia y $A, B \subseteq E$. Demuestre que

$$A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$$

P3. Sea $r \in \mathbb{R}$. Definimos el conjunto

$$A_r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

1. ¿Es el conjunto $\mathcal{S} = \bigcup_{r\in\mathbb{R}} A_r$ una partición de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?
2. ¿Qué ocurre si en vez de el conjunto de circunferencias tomamos el conjunto de círculos? es decir si en vez de A_r fuese $C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$

P3. Sea A un conjunto con al menos 3 elementos. Si $P = \{B_1, B_2\}$ es una partición de A y además C_1 es una partición de B_1, C_2 es una partición de B_2. Pruebe que $C_1 \cup C_2$ es una partición de A
Desafío: Generalíce, por inducción, para una partición de P que tenga n conjuntos

P4. Considere los siguientes ocho diagramas, que representan relaciones entre los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

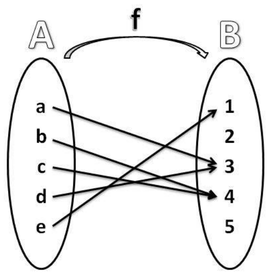

Figura 1: (a)

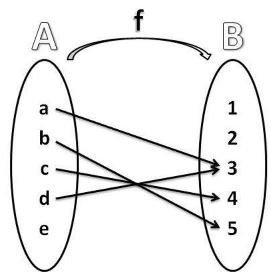

Figura 2: (b)

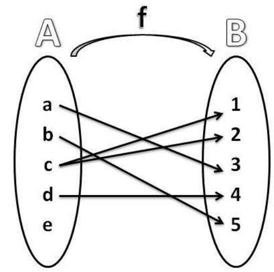

Figura 3: (c)

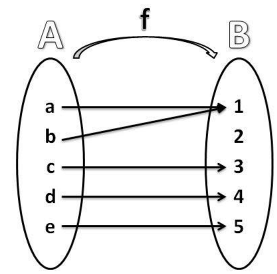

Figura 4: (d)

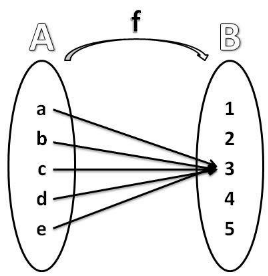

Figura 5: (e)

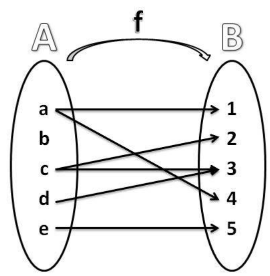

Figura 6: (f)

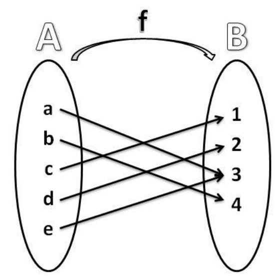

Figura 7: (g)

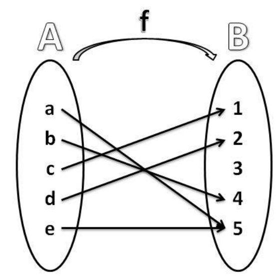

Figura 8: (h)

1. ¿Cuáles de ellos no representan una función?
2. Para los diagramas que sí representan funciones, indique el recorrido de cada función representada.
3. Para los diagramas (a) y (h):
   - ¿Existen elementos del dominio que compartan una misma imagen?
   - ¿Cuál es la preimagen de 4 en cada caso?
   - ¿Todos los elementos de B poseen preimagen?