1

Pauta Aux 4:

Matías
Azócar Carvajal

P1) $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$P(B) = \{\emptyset\}$ ← Fíjense que esto no es vacío, es el cjto. que contiene al vacío.

$P(P(B)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$P(P(B))$ = propuesto (seguir la lógica anterior)

$P(P(P(B)))$ = propuesto.

$A \times B = \emptyset$ (por propiedad, recordemos, ¿por qué?)

$A \times P(A) = \{(1,\emptyset), (1,\{1\}), (1,\{2\}), (1,\{1,2\}), \ldots$

(¡terminar!)

P2) $\Rightarrow$) Directo

$P(A) = P(B)$ (pues $A = B$).

$\Leftarrow$) Veamos la definición de $P(A)$ y $P(B)$

$\underbrace{P(A) := \{X \mid X \subseteq A\}}$ todos los conjuntos X tal que X es subconjunto de A.

$\underbrace{P(B) := \{Y \mid Y \subseteq B\}}$ todos los conjuntos Y tal que Y es subconjunto de B.

Veamos que como son iguales, podemos hacer lo siguiente:

Sea $\underline{X \in \mathcal{P}(A)} \iff X \in \mathcal{P}(B)$

Podemos tomar A, porque $A \in \mathcal{P}(A)$

$\Rightarrow A \in \mathcal{P}(A) \iff A \in \mathcal{P}(B)$

$\Rightarrow A \subseteq B$.

De la misma forma, podemos tomar $B \in \mathcal{P}(B)$

$\Rightarrow B \in \mathcal{P}(B) \iff B \in \mathcal{P}(A)$

$\Rightarrow B \subseteq A$.

Luego, por doble inclusión, tenemos $A = B$.

Concluyendo la demostración.

$\underline{P3)}$ 1.- No, ya que $A_1 = A_{-1} \iff A_1 \cap A_{-1} \neq \phi$.

Luego, no puede ser una partición.

1*.- Si cambiamos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, <u>será</u> partición!

i) $A_r \neq \phi$, $\forall r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Esto es, $\exists r$ tq $x^2 + y^2 = r^2$ no tiene solución.

pero $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{r}{\sqrt{2}}$ soluciona la ecuación

y como r está en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, x e y también.

Luego $A_r \neq \phi$, $\forall r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

ii) $A_i \cap A_j = \phi$ $\forall i \neq j$. Supongamos que no fuese así.

$\Rightarrow (x, y) \in A_i \wedge (x, y) \in A_j$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = i^2 \wedge x^2 + y^2 = j^2 \iff i^2 = j^2 \Rightarrow i = j$ (porque $i, j \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$)

$\hookrightarrow \times$, (dijimos $i \neq j$).

iii) Veamos que $\bigcup_{r\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}} A_r = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Para esto, basta probar que $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{r\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}} A_r$ (¿por qué?)

Entonces, sea $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (o sea, $a\in\mathbb{R} \wedge b\in\mathbb{R}$)

$\Rightarrow a^2+b^2 =$ "algo"

Sabemos que "algo" (al que llamaremos c) es mayor o igual a cero (¿por qué?)

Luego, $c = (\sqrt{c})^2$, o sea, $a^2+b^2 = (\sqrt{c})^2$

Luego, $(a,b)\in A_{\sqrt{c}}$, de este modo, veamos que:

$(a,b)\in A_{\sqrt{c}} \Rightarrow (a,b)\in \bigcup_{r\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}} A_r$ (porque $A_{\sqrt{c}} \subseteq \bigcup_{r\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}} A_r$)

De este modo, para un par (a,b) arbitrario en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, tenemos que pertenece a $\bigcup_{r\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}} A_r$.

i.e. $x\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \Rightarrow x\in \bigcup_{r\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}} A_r \Leftrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}\subseteq \bigcup_{r\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}} A_r$

Luego, por doble inclusión, $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \bigcup_{r\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}} A_r$

(es decir, la partición "cubre" a $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$)

$\therefore \{A_r\}_{r\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}}$ es partición de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Desafío: Piensen en una partición para $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pero en vez de ~~circulos~~, usar cuadrados

2.- No (¿en qué punto se cae?)
(de los de demostración de partición)

P3)

$P = \{B_1, B_2\}$ partición de A.

C_1 es partición de B_1.

C_2 es partición de B_2.

Veamos si $C_1 \cup C_2$ es partición de A.

i) $X_i \neq \phi$, $\forall X_i \in C_1 \cup C_2$.

$$X_i \in C_1 \cup C_2 \iff \underbrace{X_1 \in C_1}_{\substack{\neq \phi, \text{ pues} \\ C_1 \text{ es partición}}} \vee \underbrace{X_2 \in C_2}_{\substack{\neq \phi, \text{ pues} \\ C_2 \text{ es partición}}}.$$

Luego, $X_i \neq \phi$.

¡Terminaré el resto después!

Sorry, ¡intenten entenderlo ustedes igual!!