MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 5 : Funciones

20 de Abril de 2018

P1. Dé dos ejemplos de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que sean:

- inyectivas, pero no epiyectivas
- epiyectivas, pero no inyectivas
- biyectivas

Solución:

- La función $f(x) = e^x$ y $g(x) = -e^x$ (hicimos trampa aquí porque solo tomamos la reflexión de la función a través del eje x. Esto no quita que el resultado sea válido. Sin embargo, los insto a que encuentren más funciones que hagan esto)
- La función $f(x) = tg(x)$ y $g(x) = \dfrac{cos(x)}{x}$ (pueden corroborarlo a través de los siguientes gráficos) *insertar gráficos*
- Las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = x^3$ (veamos que se tiene el resultado a través de los gráficos) *insertar gráficos*

P2. Las siguientes funciones, ¿son inyectivas, epiyectivas o biyectivas?

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \to n + 1$
- $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \to n + 1$
- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \to (x + y, x - y)$
- $i : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \to \dfrac{x + 1}{x - 1}$

Solución:

- Veamos que la primera función es inyectiva:
  Suponemos $f(x_1) = f(x_2)$
  $\Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1$
  $\Leftrightarrow x_1 = x_2$
  De este modo, vemos que efectivamente la función es inyectiva. Veamos ahora que no es epiyectiva. Es muy fácil comprobar que no es epiyectiva presentando un contraejemplo, en particular, el 0 no tiene preimagen. Basta con esto para afirmar que la función f no es epiyectiva.
- Veamos que la segunda función es biyectiva.
  De la misma manera que antes, g es inyectiva.
  Para comprobar epiyectividad, veamos que podemos construir cualquier entero a partir de una "seudo inversa" al despejar la x, algo así como $g^-1(y) = x$ (No es concretamente la inversa a menos que efectivamente la función sea biyectiva, pero nos permitirá ver si es que la función es epiyectiva)
  $g(x) = x + 1 \Leftrightarrow g(x) - 1 = x$
  Veamos que para cualquier elemento en los enteros, podemos encontrar su preimagen a través de nuestra "seudo inversa" (para cualquier $g(x)$ podemos hallar su preimagen x en los enteros)
- Tal como vimos en clases, la tercera función es biyectiva (no repetiré esta demostración, pero recuerden que para igualdad de pares ordenados se tiene que tener igualdad componente a componente)
- Veamos que la última función es inyectiva
  Inyectividad: Supongamos $f(x_1) = f(x_2)$
  $\Rightarrow \dfrac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \dfrac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$

$\Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1)$
$\Leftrightarrow x_1x_2 + x_2 - x_1 - 1 = x_2x_1 + x_1 - x_2 - 1$
$\Leftrightarrow 2x_2 = 2x_1$
$\Leftrightarrow x_1 = x_2$
Luego, la función es inyectiva.
Epiyectividad: Busquemos nuestra "seudoinversa"
$i(x) = y$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{x+1}{x-1}$
$\Leftrightarrow y(x-1) = x+1$
$\Leftrightarrow yx - y = x+1$
$\Leftrightarrow yx - x = y+1$
$\Leftrightarrow x(y-1) = y+1$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1}$
Vemos que el único valor que no podemos construir en nuestra seudoinversa es aquel en el que $y = 1$ (fijarse del porqué). Así que fijémonos si es que eso genera problemas.
$y = 1 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow x - 1 = x + 1$
$0 = 2$
Esto justamente causa una contradicción. Vemos entonces que $y = i(x) = 1$ no tiene preimagen. Luego, i no es epiyectiva. Concluyendo nuestras demostraciones.

P3. Sea $f : A \to B$ una función. Demuestre que

$$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \exists\ g : B \to A \text{ tal que } g \circ f = id_A$$

<u>Solución:</u>
$\Leftarrow$ Como la identidad en A es una función biyectiva, en particular es inyectiva. Luego, por propiedad, como la composición de dos funciones es inyectiva, la de más a la derecha debe ser inyectiva. Esto es, f es inyectiva.
$\Rightarrow$ Hallaremos la función a través de una construcción. Nos interesa recuperar la preimagen de cada elemento a través de esta función, es por eso que la definiremos de la siguiente forma:

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1} \text{ si es que } y \text{ tiene preimagen en } A \\ id_A \text{ si es que no} \end{cases}$$

De ese modo, encontramos una función que al componerla con f nos entrega la identidad. Es decir, si f es inyectiva, existe una función g que permite que $g \circ f = id_A$. Es importante ver que f^{-1} es siempre como mucho un elemento porque f es inyectiva, de no ser así, podríamos tener más de una preimagen por cada elemento en B.

P4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

- ¿f es inyectiva? ¿es epiyectiva?
- Mostrar que el recorrido de f es $[-1, 1]$
- Mostrar que $g : [-1,1] \to [-1,1], g(x) = f(x)$ es una biyección.

<u>Solución:</u>

- Supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$
  $\Rightarrow \dfrac{2x_1}{1+x_1^2} = \dfrac{2x_2}{1+x_2^2}$
  $\Leftrightarrow 2x_1(1+x_2^2) = 2x_2(1+x_1^2)$
  $\Leftrightarrow 2x_1 + 2x_1x_2^2 = 2x_2 + 2x_2x_1^2)$
  $\Leftrightarrow 2(x_1 - x_2) = 2x_1x_2(x_1 - x_2)$

$\Leftrightarrow 0 = 2(x_1x_2 - 1)(x_1 - x_2)$
$\Leftrightarrow 0 = 2(x_1x_2 - 1)(x_1 - x_2)$
Veamos que hay una posibilidad en la que $f(x_1) = f(x_2)$ pero que $x_1 \neq x_2$, a saber, basta tomar el caso $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 2$ satisface $f(x_1) = f(x_2)$ pero $x_1 \neq x_2$.
Epiyectividad:
Hallemos la seudoinversa:
$y = \frac{2x}{1+x^2}$
$\Leftrightarrow (1+x^2)y = 2x$
$\Leftrightarrow y + x^2y = 2x$
$\Leftrightarrow x^2y - 2x + y = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{(2 \pm \sqrt{(4-4y^2)})}{2y}$
Un y que podemos comprobar que no es obtenible (de una forma sencilla) es alguno en el que la raíz nos dé con argumento negativo (como, por ejemplo, el 2).
Supongamos que 2 tuviera preimagen, luego:
$\frac{2x}{1+x^2} = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 + 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$
Claramente, $x \notin \mathbb{R}$. Luego, f no es epiyectiva.

- Veamos que el recorrido de f es $[-1, 1]$
  Una buena forma es demostrar que $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$.
  Veamos que $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow -1 - x^2 \leq 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$.
  Y se tiene que cualquier cuadrado es mayor o igual a cero, por lo que es cierto.
  Veamos ahora que $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$, tendremos lo siguiente:
  $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow 1 - 2x + x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ Veamos que esto es cierto por el mismo argumento de antes. (Es curioso preguntarse ¿Por qué las desigualdades anteriores no se alteraron al multiplicar el denominador?).
  Con esto, queda demostrado que el recorrido de la función es $[-1, 1]$
- Va a quedar propuesta la tercera parte, sinceramente estoy muy cansado como para hacerla ahora.

P5. Sean $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ demuestre que

$$g \circ f \text{ y } h \circ g \text{ son biyectivas.} \Leftrightarrow f, g \text{ y } h \text{ son biyectivas.}$$

Solución:
$\Leftarrow$ Es directo, pues composición de funciones biyectivas es biyectiva (siempre y cuando la composición esté definida sobre los conjuntos correctos). $\Rightarrow$ El truco está en ver que como $g \circ f$ es biyectiva, en particular es epiyectiva, luego, g es epiyectiva. Luego, del mismo modo, como $h \circ g$ es biyectiva, en particular es inyectiva. Luego, g es inyectiva. Así, g es biyectiva (por lo tanto, posee inversa, la cual también es biyectiva.
Luego, a través de composiciones ingeniosas ($g^{-1} \circ (g \circ f)$ y $(h \circ g) \circ g^{-1}$) Llegamos a que f, g, h son biyectivas. Concluyendo la demostración.

P6. Sean $f : A \to B$ y $g, h : B \to A$
Además, $g \circ f = id_A$ y $f \circ h = id_B$

- Demuestre que f es biyectiva.
- Demuestre que $g = h = f^{-1}$

Solución:

- Al igual que en la pregunta anterior, no es difícil ver que f es biyectiva. (Recordar que las identidades son funciones biyectivas. Demostrarlo no es un ejercicio difícil).

- Por composición de funciones,
  $(g \circ f) \circ f^{-1} = id_A \circ f^{-1}$
  $g \circ (f \circ f^{-1}) = f^{-1}$
  $g = f^{-1}$.
  De la misma manera, procedemos para h.
  $f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ id_B$
  $(f^{-1} \circ f) \circ h = f^{-1}$
  $id_A \circ h = f^{-1}$
  $h = f^{-1}$
  Luego, $g = h = f^{-1}$. Concluyendo la demostración.
  Es importante que se fijen que los conjuntos desde los que tomamos elementos y aquellos a los que llegan las imágenes de nuestras distintas funciones coincidan con lo que estamos haciendo, para que todo esto tenga sentido.
  Si tienen dudas, no duden en preguntar!
  Un abrazo :)