MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 6 : Funciones de Conjuntos

27 de Abril de 2018

Recordemos algunas cosas vistas en cátedra

Conjunto Imagen: Sea $f : A \to B$ una función, y sea $X \subseteq A$. Definimos el conjunto imagen del conjunto X de la siguiente forma:

$$f(X) = \{f(x) \in B : x \in X\}$$

Veamos que básicamente son todas las imágenes de cada uno de los elementos que hallamos en X.
Otra forma de verlo es la siguiente:

$$\forall y \in B, (y \in f(X) \Leftrightarrow (\exists x \in X, f(x) = y))$$

Prop.: $f : A \to B$ es epiyectiva $\Leftrightarrow f(A) = B$

Prop: Sea $f : A \to B$ función y $A_1, A_2 \subseteq A$. Se tiene lo siguiente:

- $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

Conjunto preimagen: Sea $f : A \to B$ una función y sea $Y \subseteq B$, definimos el *conjunto preimagen* de Y según f como:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$$

equivalentemente podemos definir este conjunto como:

$$\forall x \in A, (x \in f^{-1}(Y) \Leftrightarrow f(x) \in Y)$$

Prop: Sean $f : A \to B$ función y $B_1, B_2 \subseteq B$. Se tiene lo siguiente:

- $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Observación: Como se pueden dar cuenta, la preimagen se porta bien tanto con la intersección como con la unión (preservando igualdad). No así la imagen, la cual preserva igualdad solo con la unión.

Prop: Sea $f : A \to B$ función. Se tiene lo siguiente:

- $X \subseteq A \Rightarrow X \subseteq f^{-1}(f(X))$
- $Y \subseteq B \Rightarrow f(f^{-1}(Y))$

P1. [**La preimagen es lo más bonito**] Sea $f : E \to F$ una función y $A, B \subseteq F$. Demuestre que:

$$f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A) = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A)$$

P2. [**No se asusten**] Sea $E \neq \emptyset$ conjunto de referencia. Se define $f : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ por $f(X, Y) = X \setminus Y$, para cada $(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$

- Demuestre que $f^{-1}(\{E, \emptyset\}) = \{(E, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) | X \subseteq Y\}$
- Determine, justificando, $f(D)$ (conjunto imagen de D). En donde $D = \{(X, X) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) | X \in \mathcal{P}(E)\}$

P3. [**¿C2?**] Sea E el conjunto de referencia y $A, B \subseteq E$. Se define

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \to & f(X) = A \cap (B \cup X) \end{array}$$

- Demuestre que $f \circ f = f$
- Demuestre que si $A \neq E \vee B \neq \emptyset$ entonces f no es inyectiva.
- Demuestre que si $A \neq E$ entonces f no es epiyectiva.

P4. [**Buen problema**] Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto fijo. Para todo subconjunto A de E ($\forall A \subseteq E$) se define la función característica de A como:

$$\begin{aligned} \Psi_A : \quad & E \to \{0,1\} \\ & x \to \Psi_A(x) \quad \text{tal que } \Psi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \end{aligned}$$

- Describa $\Psi_E(x)$ y $\Psi_\emptyset(x)$ para todo x en E.
- Demuestre que $\forall x \in E$, $\Psi_{A\cap B}(x) = \Psi_A(x) \cdot \Psi_B(x)$
- Si $C, D \subseteq E$, entonces $C \subseteq D \Leftrightarrow (\forall x \in E)\Psi_C(x) \leq \Psi_D(x)$
- Sea $\mathcal{F} = \{f : E \to \{0,1\} | f \text{ es función}\}$, es decir, $\mathcal{F}$ es el conjunto de todas las funciones de E en $\{0,1\}$. Se define la función λ por:

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{P}(E) \quad & \to \quad \mathcal{F} \\ A \quad & \to \quad \lambda(A) = \Psi_A \end{aligned}$$

  Demuestre que λ es biyectiva.

P5. [**Propuesto**] Sea $E \neq \emptyset$ y $f : E \to E$ una función. Demuestre que:

- f es biyectiva $\Leftrightarrow f \circ f$ es biyectiva.
- $\forall A \subseteq E,\ f(A) = A \Rightarrow f = id_E$
  Indicación: Use un conjunto A adecuado.
- Si $E = \mathbb{N}$, entonces:
  $(\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N})[n_1 < n_2 \Rightarrow f(n_1) < f(n_2)] \Rightarrow f$ es inyectiva.
- Si $E = \mathbb{N}$ y f satisface la propiedad anterior, construya una función que demuestre que f no es necesariamente epiyectiva.

Hoy no hay meme