MA1101-1 y 6 Introducción al Álgebra
Profesores: Martín Matamala y Leonardo Sánchez
Auxiliar: Matías Azócar y Marcelo Navarro

Guía 2: Sumatorias

14 de Mayo del 2018

P1.- Calcule las siguientes sumatorias:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+nk)(k-n)$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kln(1+\frac{1}{k})$

d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} i^2$

e) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} 4$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kln(1+\frac{1}{k})$

P2.- Sean $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, x \neq y$. Pruebe sin usar inducción que para todo $n \geq 1$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-i-1}y^i = \frac{x^n - y^n}{x-y}$$

P3.- Se definen los números armónicos como:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Demuestre que

$$1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \leq 1 + n$$

P4.- Para $m \geq 1$ calcule $\displaystyle\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)$

P5.- Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$.

P6.- Calcule:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ *c)* $\displaystyle\sum_{i=5}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{i+1}{j(j+1)}$

P7.- Calcule:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$ *b)* $\displaystyle\sum_{k \text{ impar}}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2+2k+1}+\sqrt[3]{k^2-1}+\sqrt[3]{k^2-2k+1}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k2^k}{(k+2)!}$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(2k)$

Hint: Para *d)* considere la siguiente identidad $cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta) = 2sin(\alpha)sin(\beta)$ y elija α y β de manera adecuada.

P8.- Se pide calcular en función de n, el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2,$$

procediendo como se indica:

(i) Escriba la suma de los términos pares, usando $k = 2i$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(ii) Escriba la suma de los términos impares, usando $k = 2i - 1$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

P9.- *a*) Calcule la siguiente suma:

$$a + aa + aaa + aaaa + \ldots + \underbrace{aa \ldots aa}_{n \text{ a's}}$$

Donde a es un dígito.
Hint: Le puede ser útil calcular primero el caso $a = 9$.

b) Considere, para $n \in \mathbb{N}$, la suma

$$S \;=\; 1 \;+\; \frac{1+2}{2} \;+\; \frac{1+2+3}{3} \;+\; \ldots \;+\; \frac{1+2+3+\ldots+n}{n}$$

Escriba S como una sumatoria doble y calcule su valor.

P10.- Queremos calcular $\sum\limits_{k=0}^{n} k2^k$ para esto calcule:

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)2^{k+1}$$

y llegue a una ecuación para $\sum\limits_{k=0}^{n} k2^k$.
Obs: La idea de agregar el término siguiente y llegar a una ecuación se conoce como método de la perturbación

P11.- Demuestre que si a_n es una secuencia, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j:j=0 \mod i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:i \text{ divide a } j} a_{i,j}$$

Hint: Note que no puede intercambiar las sumas pues los indices no son independientes, independícelos definiendo una cantidad $c_{i,j}$ apropiada.

P12.- Definimos, para $n \geq 1$, $r \neq 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kr^k.$$

a) Demuestre, sin usar inducción que:

$$S_n = r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}.$$

Hint: *Use cambio de índices en S_n.*

b) Pruebe, nuevamente sin uso de inducción, que:

$$S_n = \frac{r - (n+1)r^{n+1} - nr^{n+2}}{(1-r)^2}.$$

P13.- Argumente que:

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} 2^k$$

Use esto para calcular la suma del lado izquierdo.
Obs: Este método de reescribir una suma como una suma doble se conoce como expandir y contraer.

P14.- Muestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

P15.- Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ un número natural fijo cualquiera y $n \in \mathbb{N}$ un número impar cualquiera. Demuestre, sin usar inducción, que la suma de los n naturales consecutivos a partir de k_0 es divisible por n

P16.- Muestre que para n par, se tiene que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{4^k} = \frac{1}{5}(1 - \frac{1}{4^n})$

P17.- Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)a_i$$