

MA1101-6 Introducción al Álgebra

Profesor: Martín Matamala

Auxiliar: Matías Azócar Carvajal



Auxiliar 8 : Sumatorias

10 de Mayo del 2018

■ Sumatoria por extensión:

$$\sum_{i=p}^q a_i = a_p + a_{(p+1)} + a_{(p+2)} + \cdots + a_{(q-1)} + a_q$$

■ Suma de unos:

$$\sum_{k=m}^n 1 = n - m + 1$$

■ Sacar el escalar:

$$\sum_{k=m}^n \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum_{k=m}^n a_k$$

■ Separar la suma:

$$\sum_{k=m}^n a_k \pm b_k = \sum_{k=m}^n a_k \pm \sum_{k=m}^n b_k$$

■ Traslación de índices:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m-s}^{n-s} a_{k+s} = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s}$$

■ Separar los índices:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^s a_k + \sum_{k=s+1}^n a_k \quad \text{para } m \leq s < n$$

■ Suma Telescópica:

$$\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$$

■ Suma de los primeros n naturales:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

■ Suma de los primeros n cuadrados

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

■ Suma de los primeros n cubos

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Obs: para las 3 sumas anteriores, si parten de 0 o de 1 es la misma fórmula (Piensen que si suman el cero en realidad no alteran nada)

■ Geométrica:

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

para $r \neq 1$

P1.- [Sus trucazos] Calcule

$$a) \sum_{k=3}^{n-1} (k-2)(k+1)$$

$$b) \sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}+1} (2i-1)$$

$$c) \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$d) \sum_{k=3}^n b_k - b_{k-3}$$

$$e) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}(k+1) + k\sqrt{k+1}}$$

$$f) \sum_{k=0}^n k k!$$

$$g) \sum_{k=1}^n \frac{n k 2^k}{(k+2)!}$$

P2.- [Hágalo usted mismo] Escriba la siguiente suma en notación de sumatoria y luego calcule su valor

$$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n}$$

P3.- [Ese sub ene] Definamos para $n \geq 1, r \neq 1$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n kr^k$$

a) Demuestre sin usar inducción que:

$$S_n = r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}$$

Observación: Use cambio de índice en S_n

b) Demuestre sin usar inducción que:

$$S_n = \frac{r - (n+1)r^{n+1} + nr^{n+2}}{(1-r)^2}$$

P4.- [Armonía] Se definen los números armónicos como:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

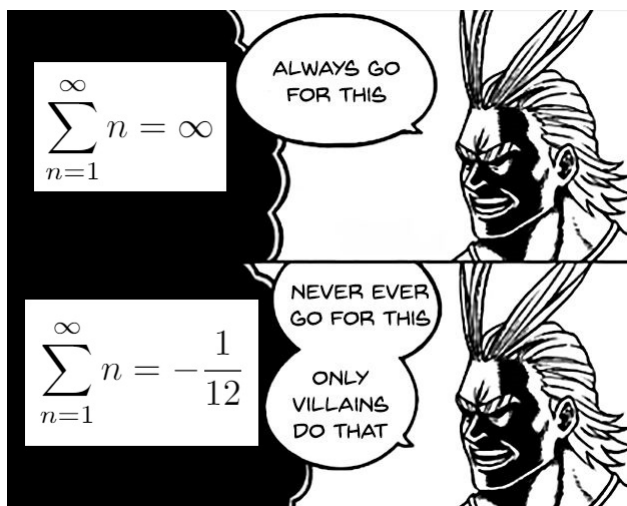
Demuestre por inducción que

$$1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \leq 1 + n$$

P5.- [Propuesto] Considere, para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la suma

$$S = 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \cdots + \frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$$

Indicación: Escriba S como una sumatoria doble y calcule su valor.



“Un consejo de su buen amigo All Might”