MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 11: Estructuras Algebraicas 2

3 de agosto de 2018

- Dadas dos ee.aa. $(A,\star),(B,\Delta)$ llamaremos homomorfismo de $(A,\star)$ en (B,Δ) a la función f que hace lo siguiente:

$$\forall x,y\in A,\ \ f(x\star y)=f(x)\Delta f(y)$$

- Si f es:
  - inyectiva, se llamará **monomorfismo**
  - epiyectiva, se llamará **epimorfismo**
  - biyectiva, se llamará **isomorfismo** entre $(A,\star)$ y (B,Δ)
  - Si $(A,\star)=(B,\Delta)$ el homomorfismo se llamará **endomorfismo** (si además es biyectivo, es llamado **automorfismo**)

- Se define $\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/\equiv_n$. A partir de esto podemos definir:
  - $[x]_n+[y]_n=[x+y]_n$
  - $[x]_n\cdot[y]_n=[x\cdot y]_n$

  Recordemos además que si $x\equiv_n y$, entonces $[x]_n=[y]_n$

- Sea $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{Z}$ tal que $x_1\equiv_n x_2$ y $y_1\equiv_n y_2$. Entonces

$$(x_1+y_1)\equiv_n(x_2+y_2)\text{ y }(x_1\cdot y_1)\equiv_n(x_2\cdot y_2)$$

  Es decir, si $[x_1]_n=[x_2]_n$ y $[y_1]_n=[y_2]_n$, entonces

$$[x_1+y_1]_n=[x_2+y_2]_n\text{ y }[x_1\cdot y_1]_n=[x_2\cdot y_2]_n$$

- (*Notación*) $x\equiv_n y\Leftrightarrow x=y\pmod n$

- **Def:** un **grupo** es una estructura algebraica que es asociativa, posee neutro y tal que todo elemento en ella es invertible. Si además, cada par de elementos **conmuta** según la *l.c.i.*, diremos que el grupo es *abeliano*.

- Cuando se quiera operar con inversos de la siguiente forma, es esta relación la que se tendrá en una estructura algebraica con operación $\star$:

$$(a\star b)^{-1}=b^{-1}\star a^{-1}$$

P1.- Matías cumplió 20 años este año. Su cumpleaños cayó día Domingo. ¿Qué día de la semana era cuando él nació?

P2.- Sea $(S,*)$ una estructura algebraica dado por la siguiente tabla: Determine si $*$ es asociativa en S

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	a

P3.- Considere $(\mathbb{Z}_5,\cdot_5)$

a) Construya la tabla para la operación $\cdot_5$ en $\mathbb{Z}_5$

b) Explique por qué $(\mathbb{Z}_5,\cdot_5)$ no es un grupo.

c) Muestre que $(\mathbb{Z}_5\setminus\{[0]\},\cdot_5)$ es un grupo abeliano.

P4.- Si G es un grupo tal que $(ab)^2=a^2b^2$ para todo $a,b\in G$, entonces muestre que G debe ser abeliano.

P5.- Pruebe que si, en un grupo G, cada elemento es inverso de si mismo, entonces G es abeliano.

P6.- Sea $(G, \star)$ un grupo con elemento neutro e. Se define en $G \times G$ la ley de composición interna $\triangle$ como:

$$(a, b)\triangle(c, d) = (a \star c, b \star d)\ \forall (a, b), (c, d) \in G \times G.$$

a) Pruebe que $(G \times G, \triangle)$ es grupo.

b) Suponga ahora que $(G, \star)$ es grupo abeliano y considere la función $\phi : G \times G \to G$ definida por $\phi((a, b)) = (a \star b)^{-1}, \forall (a, b) \in G \times G$. Demuestre que ϕ es un homomorfismo de $(G \times G, \triangle)$ en $(G, \star)$.

c) ¿Es ϕ un isomorfismo? Justifique.

Figura 1: Creo que van a pelear con grupos