MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 13: Números Complejos

16 de agosto de 2018

- $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ es el conjunto de los números complejos, dotados de las operaciones $+, \cdot$ de la siguiente forma. Sean $z = (a, b)$, $w = (c, d) \in \mathbb{C}$

$$z + w = (a + c, b + d)$$

$$z \cdot w = (ac - bd, ad + bc)$$

- El neutro de $(\mathbb{C}, +)$ es $(0, 0)$ y el neutro de $(\mathbb{C}, \cdot)$ es $(1, 0)$
- El inverso en $(\mathbb{C}, +)$ de (a, b) es $(-a, -b)$
- El inverso en $(\mathbb{C}, \cdot)$ para $(a, b) \neq (0, 0)$ es $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$
- La unidad imaginaria es el complejo $(0, 1)$. Se anota i.
- Un complejo (a, b) se puede escribir en **forma cartesiana** como $a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$.
- La parte real de un complejo $a + bi$ es a y se anota $Re(z)$
- La parte imaginaria de un complejo $a + bi$ es b y se anota $Im(z)$
- Las **coordenadas polares** de $z \in \mathbb{C} \setminus \{O\}$ son el par $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ donde:
  - r es la distancia de z al origen O. Se llama módulo de z y se anota $|z|$
  - θ es el ángulo que se forma entre el eje OX y el segmento que une z con el origen O. Se llama el argumento de z y se anota $arg(z)$.
- El cambio de coordenadas tele es $a = rcos\theta$ y $b = rsin\theta$.
- Para $\theta \in \mathbb{R}$ anotamos $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ (también llamada forma *cis*, por $cos + isin$). La expresión $|z|e^{iarg(z)}$ se llama la **forma polar** de z

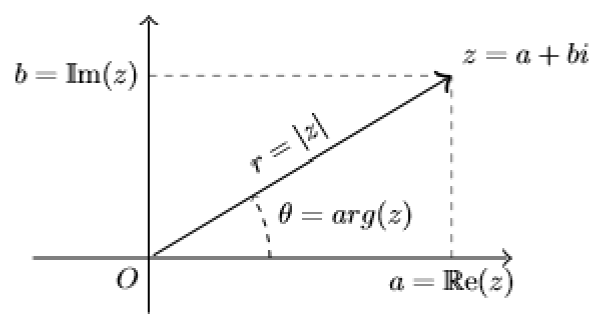

Figura 1: Un complejo en forma polar

- El **conjugado** del complejo $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$. Trabajando en forma polar queda $z = |z|e^{iarg(z)}$, $\overline{z} = |z|e^{-iarg(z)}$
- $z\overline{z} = |z|^2$
- Para un complejo $z = a+bi$ se calcula $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Se tiene que $e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$

P1.- Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = |z + 1|$. Demuestre que $Re(z)=\frac{-1}{2}$

P2.- Sea $z \in \mathbb{C}$, pruebe que

$$|z + i| = |z - i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

P3.- Muestre que el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left|\frac{z - 2}{z + 1}\right| = 2$$

forman una circunferencia en el plano complejo. Determine su centro y su radio.

P4.- Expresar en forma cartesiana y polar $\dfrac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}}$

P5.- [**Propuesto**] Sea $m \in \mathbb{N}$. Escriba $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ en forma $\rho e^{i\theta}$ y pruebe que:

$$6|m \Leftrightarrow \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2$$

Indicación: Para probar $\Leftarrow$ estudie qué pasa con m par e impar.

P6.- Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbb{R}$

P7.- Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ complejos unitarios tales que:

$$z_1 + z_2 = -u \in \mathbb{C} \qquad z_1 \cdot z_2 = v \in \mathbb{C}$$

Demuestre que:

a) $|u| \leq 2$ y $|v| = 1$

b) $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\dfrac{u}{v}$

c) Demuestre que $u = \overline{u}v$

d) Si los ángulos de la escritura polar u y v son ϕ y θ, i.e.:

$$u = |u|e^{i\phi},\ v = |v|e^{i\theta}$$

Utilice (c) para demostrar que:

$$\theta = 2\phi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

P8.- Sea $E = \{a+b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$. Asumiendo que $(E, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad, es decir, esa es información dada, no necesita demostrarlo. Para este anillo:

a) Encuentre los neutros de la suma y el producto.

b) Pruebe que $(E, +, \cdot)$ no tiene divisores de cero.

c) Muestre que $(E, +, \cdot)$ no es un cuerpo.

P9.- Sea $(K, \oplus, \odot)$ un cuerpo. Se sabe que $(K \times K, \oplus, \odot)$ con $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 \oplus x_2, y_1 \oplus y_2)$ y $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 \odot x_2, y_1 \odot y_2)$ es un anillo conmutativo con unidad (no es necesario que lo demuestre).

a) Encuentre neutro para $\oplus$ y neutro para $\odot$ en $K \times K$.

b) Demuestre que para $(a, b) \neq 0_{K\times K}$: (a, b) es invertible $\Leftrightarrow$ (a, b) no es un divisor del cero.

c) ¿Es $(K \times K, \oplus, \odot)$ cuerpo?. Justifique