P1 Pauta Aux 13

Sea $z = a+bi$, con $a,b \in \mathbb{R}$.

Entonces $z+1 = (a+1)+bi$.

Basta entonces trabajar el módulo de z y $z+1$.

$|z| = |z+1|$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a+1)^2+b^2} \quad /()^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2 = (a+1)^2+b^2 = a^2+2a+1+b^2$

$\Leftrightarrow \cancel{a^2}+\cancel{b^2} = \cancel{a^2}+\cancel{b^2}+2a+1$

$\Leftrightarrow 2a+1=0 \Leftrightarrow a = -1/2$. Pero $a = Re(z)$, demostrando lo pedido.

P2

Sea $z = a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$. pdq $|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow)$ $|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b+1)^2} = \sqrt{a^2+(b-1)^2} \quad /()^2$

$z+i = a+(b+1)i$, $z-i = a+(b-1)i$

$\Rightarrow \cancel{a^2}+(b+1)^2 = \cancel{a^2}+(b-1)^2$ /desarrollamos

$\cancel{b^2}+2b+\cancel{1} = \cancel{b^2}-2b+\cancel{1}$

$4b = 0 \Rightarrow b = 0$

Luego, $z = a+bi = a \in \mathbb{R}$.

$\Leftarrow)$ $z \in \mathbb{R}$, $z = a \in \mathbb{R} \Rightarrow z = a+0\cdot i$

$z+i = a+1\cdot i$

$z-i = a-1\cdot i$

$\Rightarrow |z+i| = \sqrt{a^2+(1)^2}$ y $|z-i| = \sqrt{a^2+(-1)^2}$, que claramente son iguales concluyendo la demostración.

Propuesto: $|z+\alpha i| = |z-\alpha i| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

P3) $\left|\dfrac{z-2}{z+1}\right| = 2$ Ver que z describe una circunferencia, hallar centro y radio

↳ Sea $z = a+bi$. Además, el módulo se separa en divisiones.

$\Rightarrow 2 = \dfrac{|z-2|}{|z+1|} \Rightarrow 2|z+1| = |z-2|$, aplicamos el módulo.

$z+1 = (a+1)+bi$
$z-2 = (a-2)+bi$

$\Rightarrow 2\sqrt{(a+1)^2+b^2} = \sqrt{(a-2)^2+b^2} \;/()^2$

$\Rightarrow 4(a^2+2a+1+b^2) = (a^2-4a+4+b^2)$

$\Rightarrow 3a^2+12a+3b^2 = 0 \Rightarrow a^2+4a+b^2=0.$

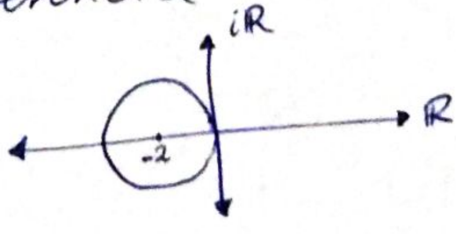
Completando cuadrados para a (recordando que queremos obtener una circunferencia)

$a^2+4a+4+b^2-4=0$

$\Rightarrow (a+2)^2+b^2=4.$

↑

esta es una circunferencia centrada en $(-2,0)$ de radio 2.



P4) Veamos (al jugar un poco) si logramos llegar a un patrón para no matraquear infinito.

$\longrightarrow (1-i)^2 = (1-i)\cdot(1-i) = 1^2 - 2i + (i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$.

Entonces $(1-i)^{17} = (1-i)^{16}\cdot(1-i) = \left[(1-i)^2\right]^8 \cdot (1-i)$

$= [-2i]^8 \cdot (1-i) = 2^8 \cdot i^8 \cdot (1-i) = 2^8 \cdot (1-i)$.

cada 4 en el exponente de i obtenemos 1

$i^1 = i \quad i^3 = -i$

$i^2 = -1 \quad i^4 = 1$

La gracia de haber hallado este monomio $(-2i)$ es que elevarlo a una potencia grande es MUY fácil.

Ahora, trabajando el denominador.

$1 + i^{17} \rightarrow$ recordando lo anterior $\rightarrow 1 + i$.

Quedando: $\dfrac{2^8 \cdot (1-i)}{1+i}$, ahora, haremos algo similar a desracionalizar.

$\{$Prop: $z \cdot \bar{z} = |z|^2\}$ multiplicamos arriba y abajo con $1-i$ (el conjugado de $1+i$)

$$\Longrightarrow \frac{2^8(1-i)\cdot(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2^8 \cdot (1-i)^2}{|1+i|^2} = \frac{2^8(-2i)}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2} = -2^8 i$$

$= -256i$

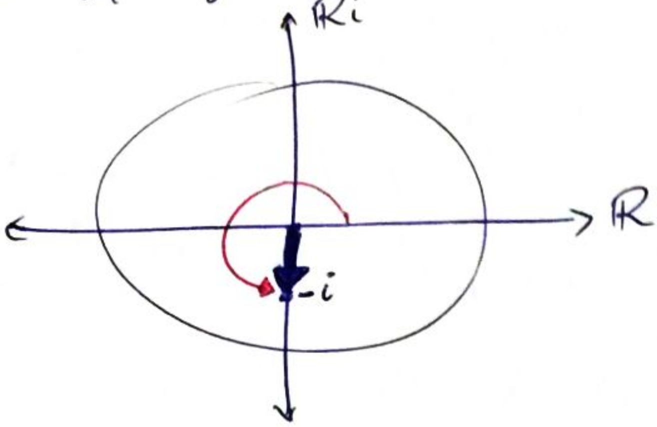
Ahora, lo escribimos en forma polar:

$$Z = |Z| e^{i \arg(Z)}$$

$1°$ $|Z| = |-256i| = \sqrt{0^2 + (-256)^2} = 256.$

$\Rightarrow Z = 256 \cdot e^{i \arg(Z)}$ ← esto es lo que le falta a 256 para ser $-256i$, o sea, $-i$.

Falta hallar el argumento de Z. Esto es:



El ángulo se mide desde el eje real hacia la izquierda.

Hallar el ángulo que describe a $-i$, el cual es $\frac{3\pi}{2}$.

Quedando entonces que la forma polar es:

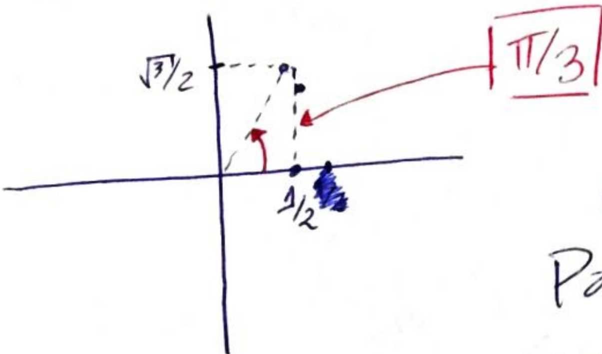
$$Z = 256 \cdot e^{i\, 3\pi/2}.$$

$\boxed{P_5}$ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = z$

$\rightarrow$ forma polar: $|z| e^{i \arg(z)}$

$$|z| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1.$$

Ahora, buscamos el argumento.



Una forma menos "al ojo" de hallar ese ángulo.

Pasar a forma cis.

$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$

Notemos que aquí, como el módulo es 1, igualamos el complejo a lo que usamos para hallar el argumento, eso podría no pasar siempre.

$\rightarrow \cos(\theta) = 1/2 \leftarrow \theta = \pi/3$

$\sin(\theta) = \sqrt{3}/2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1 \cdot e^{i\pi/3} = e^{i\pi/3}.$$

Ahora, demostraremos el problema:

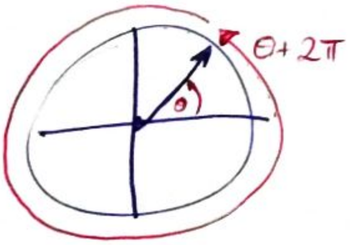
$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $6 | m$ y veamos lo que pasa:

Si $6|m \Rightarrow m = 6k$ para $k \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^m + \left(-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^m = \left(e^{i\pi/3}\right)^{6k} + \left(-e^{i\pi/3}\right)^{6k}$$

$= \left(e^{2\pi\cdot i}\right)^k + \left(e^{2\pi\cdot i}\right)^k$ pero $e^{i2\pi} = e^{i\cdot 0} = 1$.

$= 1 + 1 = 2$ (ojo, los argumentos son iguales en módulo 2π, es como dar una vuelta al plano complejo).



$\Leftarrow]$ Usando el hint.

m par $\Rightarrow$ $m = 2k$

$$\left(e^{i\pi/3}\right)^{2k} + \left(-e^{i\pi/3}\right)^{2k} = 2$$

$$\Rightarrow \cancel{2}e^{i\cdot 2\pi/3\, k} = \cancel{2}$$

$$\Rightarrow e^{i2\pi/3\, k} = 1$$

$\Rightarrow$ el angulo de $e^{i2\pi/3\, k}$ debe ser múltiplo de 2π (para que valga 1). Luego:

$\frac{\cancel{2\pi}k}{3} = p\cdot\cancel{2\pi} \Rightarrow k = 3p \Rightarrow k$ es múltiplo de 3.

Luego, m es múltiplo de 6 (equivalentemente, $6|m$).

m impar
$m=2k+1$ $\Rightarrow \left(e^{i\pi/3}\right)^{2k+1}+\left(-e^{i\pi/3}\right)^{2k+1}=2$

$$\Leftrightarrow \left(e^{i\pi/3}\right)^{2k+1}-\left(e^{i\pi/3}\right)^{2k+1}=2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0=2.$$

Lo que es una [redacted] FALSO, luego, m no puede ser impar. Además ($F \Rightarrow$ algo) $\Leftrightarrow V$.
Concluyendo la implicancia a la izq.
(Esto no va a entrar para el control, así que tranquilos si no se entiende todo).

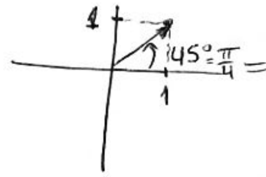
$\boxed{P6}$ $(1+i)^n+(1-i)^n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$\rightarrow$ Para resolver esto, nos iremos a forma polar!

$1+i \rightarrow$

$|z|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\rightarrow \arg(z)$



$\Rightarrow 1+i=\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$

$1-i \rightarrow$ conjugado de $1+i \Rightarrow 1-i=\sqrt{2}\,e^{i\cdot -\pi/4}$ ← le cambia el signo al exponente (el argumento)

$$\Rightarrow (1+i)^n+(1-i)^n=\sqrt{2}^{\,n}e^{in\pi/4}+\sqrt{2}^{\,n}e^{-in\pi/4}$$

$$=\sqrt{2}^{\,n}\left(e^{in\pi/4}+e^{-in\pi/4}\right)=\sqrt{2}^{\,n}\big(\cos(n\pi/4)+i\sin(n\pi/4)$$
$$+\cos(-n\pi/4)+i\sin(-n\pi/4)\big)$$

Usando props de seno y coseno.

$$\sqrt{2}^{\,n}\left(\cos(n\pi/4)+\cancel{i\sin(n\pi/4)}+\cos(n\pi/4)-\cancel{i\sin(n\pi/4)}\right)$$

$$=\sqrt{2}^{\,n}\left(2\cos(n\pi/4)\right)\in\mathbb{R}$$

Concluyendo la demostración

Como acotación, se puede resolver pasando a forma polar:

$(1+i) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \quad (1-i) = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

demuestren estas igualdades y lo hacen.

P7) z_1, z_2 unitarios $\in \mathbb{C}$ (esto es $|z_1| = |z_2| = 1$)

$z_1 + z_2 = -u \in \mathbb{C}, \quad z_1 \cdot z_2 = v \in \mathbb{C}$.

Dem que

a) $|u| \leq 2, |v| = 1$. $|u| = |-u| = |z_1 + z_2| \overset{\text{desigualdad triangular}}{\leq} |z_1| + |z_2| = 2$

$|v| = |z_1 \cdot z_2| \underset{\text{el módulo separa según el }\cdot}{=} |z_1| \cdot |z_2| = 1 \cdot 1 = 1$

b) <u>Continuación</u> $\quad -\frac{u}{v}$

$$z_1 + z_2 = -u \in \mathbb{C}$$
$$z_1 \cdot z_2 = v \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1}$$

$$= \frac{\overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} + \frac{\overline{z_1}}{z_1 \cdot \overline{z_1}}$$

$$= \frac{\overline{z_2}}{\cancel{|z_2|^2}_{1}} + \frac{\overline{z_1}}{\cancel{|z_1|^2}_{1}}$$

$$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

c) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $\qquad \overline{-(a+bi)} = \overline{(-a-bi)}$

$\Rightarrow \overline{-u} = -\frac{u}{v}$ $\quad$ pero $\overline{-u} = -\overline{u}$ $\quad = (-a+bi) = -(a-bi)$

$= -(\overline{a+bi})$

$\Rightarrow \cancel{-}\overline{u} = \cancel{-}\frac{u}{v} \Rightarrow \overline{u}v = u.$

d) $u = \overline{u}v \Rightarrow \cancel{|u|}^{1} e^{i\phi} = \cancel{|u|}^{1} \cdot e^{i(-\phi)} \cdot \cancel{|v|}^{1} e^{i\theta}$

$$e^{i(2\phi)} = e^{i\theta}$$

$\Rightarrow$ son iguales en módulo 2π los ángulos

$\Rightarrow \theta = 2\phi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$

Concluyendo lo pedido.