MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 14: Raíces de la Unidad y Polinomios

23 de agosto de 2018

- Las raíces de la unidad son todos los w que satisfacen la ecuación $w^m = 1,\ m \in \mathbb{N}$
- Dada la materia de polinomios, saben que hay m raíces (no necesariamente distintas) en $\mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación. Para obtenerlas, nos pasamos a forma polar.
- Las raíces de la unidad tienen forma $e^{\frac{2\pi k\cdot i}{n}}$, con $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ (Recuerden que $e^{2\pi\cdot i}$)
- **Definición de polinomio:** Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Un polinomio es una función p de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ tal que para todo $x \in \mathbb{K}$:
$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
- Dos polinomios son iguales sí y solo sí tienen los mismos coeficientes.
- El **grado** de un polinomio es la mayor potencia a la que está elevada un x.
- Un polinomio se dice mónico si el coeficiente del x elevado a la mayor potencia es 1 (por ejemplo, $p(x) = x^2 + 2x$ es mónico. Sin embargo $q(x) = 2x^3 + 5$ no lo es).
- $p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{n} (p_k + q_k) x^k$
- $p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^{k} (p_j \cdot q_{k-j}) \right) \cdot x^k$
- $gr(p + q) \leq max\{gr(p), gr(q)\}$
- $gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)$
- **Teorema del Resto:** Sea $p \in \mathbb{K}[x]$ y $c \in \mathbb{K}$. El resto de dividir p por $(x - c)$ es $p(c)$.
- **Raíz de un polinomio:** Diremos que $c \in \mathbb{K}$ es raíz del polinomio p si $p(c) = 0$
- Si c es raíz de un polinomio p entonces $(x - c)|p$
-
  - Si $c_1, \ldots, c_k$ son raíces distintas del polinomio p, entonces $(x - c1) \cdot \ldots \cdot (x - ck)|p(x)$.
  - Si un polinomio p tiene grado $n \geq 1$, entonces p tiene a lo más n raíces distintas.
  - Si un polinomio p tiene grado $\leq n$ y $c_1, \ldots, c_{n+1}$ son raíces distintas de p, entonces p es el polinomio nulo.
  - Sean p, q polinomios con grado a lo más $n \geq 1$. Si p y q coinciden en $n + 1$ puntos distintos, entonces $p = q$
- **Teorema Fundamental del Álgebra** Todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ y grado $n \geq 1$ tiene a lo menos una raíz compleja.
- Si p es un polinomio a coeficientes reales (i.e. $p \in \mathbb{R}[k]$) y $z \in \mathbb{C}$ es raíz de p entonces $\overline{z}$ tb es raíz de p.
- Si p es un polinomio mónico a coeficientes enteros $a_0, \ldots, a_{n1} \in \mathbb{Z}$, entonces si p tiene una raíz racional, esta (en verdad) es entera y divide a a_0.

  Dicho de otra forma, en este caso, candidatos a raíces del polinomio, son los divisores enteros del término libre.

P1.- Demuestre que las soluciones de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ son (algunas) raíces cúbicas de la unidad.

P2.- *a)* Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las n-ésimas raíces de la unidad. Pruebe que, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$
$$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$$

b) Sea $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ el polinomio de grado m definido por
$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

Demuestre que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} p(w_j) = p(0)$$

P3.- Dada la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + a = 0,\ \ a, b \in \mathbb{R}$$

determine a y b de modo que $x = 2 + i$ sea una raíz y determine las otras raíces.

P4.- Sea $p(x)$ un polinomio de grado mayor o igual a 1 y $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que r es raíz de $p(x)$ sí y solo sí $(r - a)$ es raíz de $q(x) = p(x + a)$.

P5.- Considere el polinomio $p(x) = x^4 + 2$. Determine las raíces de p y escriba su factorización tanto en $\mathbb{R}[x]$ como en $\mathbb{C}[x]$

P6.- Considere $p \in \mathbb{R}[x]$ con $gr(p) = 5$ tal que cumple lo siguiente:

$p(1) = 1^2$
$p(2) = 2^2$
$p(3) = 3^2$
$p(4) = 4^2$
$p(5) = 5^2$
$p(6) = 84$

Halle el polinomio p.