MA1101-6 Introducción al Álgebra
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Matías Azócar Carvajal

Auxiliar 15: Auxiliar Final

28 de agosto de 2018

P1.- Sea $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ tal que

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Se define la función $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$q(x) = p(ix)$$

a) Muestre que $q(x)$ es un polinomio y dé explícitamente sus coeficientes en función de los coeficientes de p.

b) Demuestre que

$$p = q \Leftrightarrow \text{ para cada } k \text{ que no es múltiplo de 4, } a_k = 0$$

P2.- Al dividir el polinomio $p(x) = \alpha x^4 - x^3 + \beta x^2 + 10x - 2\alpha$ por $x - 1$, el resto es 3 y el cuociente es un polinomio que toma el valor 21 cuando $x = 2$. Calcule las constantes α y β.

P3.- Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ el polinomio dado por

$$p(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10$$

Encuentre todas las raíces de $p(x)$ sabiendo que admite una raíz racional, no entera, positiva y otra raíz entera negativa.

Factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

P4.- Recuerde que las soluciones de la ecuación

$$q(x) = x^2 + x + 1 = 0$$

son raíces cúbicas de la unidad.

a) Sea $p(x) = x^{3n_1} + x^{3n_2+1} + x^{3n_3+2}$, donde $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$. Demuestre que $p(x)$ es divisible por $q(x)$, cualquiera sean los valores de n_1, n_2, n_3.

b) Se define en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por $z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{R}$.

- Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
- Muestre que $[z]_{\mathcal{R}} = \{a \cdot z | a \in R \setminus \{0\}\}$