Guía N° 1 LÓGICA MA11A

P1 (a) Sean p, q proposiciones. Definamos la proposición:

$p \vdash q \Leftrightarrow$ (Existe una proposición r tal que $(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$)

Pruebe que $p \vdash q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ (Control 1, 1995)

P1 (b) Verificar con y sin tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r] \Rightarrow \bar{p}$$ (Control 1, 1995)

● Solución:

(a) ($\Rightarrow$) Como $p \vdash q$ es verdadera, $\exists r$ proposición tal que $p \Rightarrow r \wedge r \Rightarrow q$

Luego $p \Rightarrow q$ es verdadera (por transitividad de la "$\Rightarrow$") ■

($\Leftarrow$) Como $p \Rightarrow q$ es verdadera, podemos afirmar que

$$\Big(\exists r = p \text{ tq}^{(*)} \underbrace{(p \Rightarrow \underset{p}{r})}_{\text{Siempre verdadera}} \wedge \underbrace{(\underset{p}{r} \Rightarrow q)}_{\text{Verdadera pues sabemos que } p \Rightarrow q \text{ es verdadera}}\Big) \Leftrightarrow p \vdash q$$

Por definición de $p \vdash q$ ■

Luego, como probamos las 2 implicancias tenemos que $p \vdash q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ ■

(b) Sin tabla de verdad:

Como $(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r$ es verdadera (el único caso que merece ser analizado)

entonces $(p \Rightarrow \bar{q})$, $(\bar{r} \vee q)$ y r son verdaderas.

Así:

$(\bar{r} \vee q) \Leftrightarrow F \vee q \Leftrightarrow q$, y como $(\bar{r} \vee q)$ es V, q también es V.

Pues r es verdadera

Finalmente $(p \Rightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow (p \Rightarrow F) \Leftrightarrow \bar{p} \vee F \Leftrightarrow \bar{p}$

(Pues q es V)

y como $(p \Rightarrow \bar{q})$ es V, entonces $\bar{p}$ es V ■

(*) tq: tal que

Con tabla de verdad:

p	q	r	$p \Rightarrow \bar{q}$	$\bar{r} \vee q$	$(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r$	$[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r] \Rightarrow \bar{p}$
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V

Consejo: Notar que $p \Rightarrow \bar{q}$ solo será falsa cuando p sea verdadera y $\bar{q}$ sea falsa (q verdadera)
↳ Así es más fácil llenar la tabla.
Notar que $(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r$ solo será verdadera cuando $(p \Rightarrow \bar{q})$, $(\bar{r} \vee q)$ y r sean verdaderas ▨

P2 (a) Sean p, q y r proposiciones. Construir una proposición compuesta "s" (en función de p, q y r) cuya tabla de verdad es:

p	q	r	s	
V	V	V	V	←
V	V	F	V	←
V	F	V	F	
V	F	F	V	←
F	V	V	F	
F	V	F	F	
F	F	V	F	
F	F	F	V	←

(Control 1, 1996)

(b) Probar que $s \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ es una Tautología.

(Control 1, 1996)

Solución:
(a) Fijemos nuestro análisis en las filas donde s es verdadera (las marcadas con '←')
Observemos la primera de ellas.
Busquemos una proposición que solo sea cierta cuando p, q y r son verdaderos (Importante: cualquier otro valor de verdad para p, q y r hace que esta afirmación sea falsa)
Sea esta $p \wedge q \wedge r$
Para la segunda fila buscamos una proposición que solo sea cierta cuando $p \Leftrightarrow V$, $q \Leftrightarrow V$ y $r \Leftrightarrow F$

Haciendo lo mismo para la tercera y cuarta fila donde s es verdadera obtenemos las proposiciones $p \wedge \sim q \wedge \sim r$ y $\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$ respectivamente.
La solución al problema propuesto es una "gran proposición" compuesta por estas 4 "miniproposiciones":

$$s \Leftrightarrow [\underbrace{(p \wedge q \wedge r)}_{(1)} \vee \underbrace{(p \wedge q \wedge \bar{r})}_{(2)} \vee \underbrace{(p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})}_{(3)} \vee \underbrace{(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})}_{(4)}]$$

Veamos que funciona.
Si (p,q,r) tienen los valores de verdad (V,V,V), (V,V,F), (V,F,F) ó (F,F,F) (Mirar las filas marcadas con '←') entonces (1), (2), (3) ó (4) es respectivamente verdadero y por lo tanto lo es s (Gracias a que (1), (2), (3) y (4) estan unidos por el conectivo "$\vee$")

Ahora si (p,q,r) tiene los valores de verdad (V,F,V), (F,V,V), (F,V,F) ó (F,F,V) (Las filas sin '←') notamos que (1), (2), (3) y (4) son falsas (Por contrucción solo son ciertas para las filas con '←') y por ende s es falsa ▨

(b) 1^era^ solución:

$$s \Leftrightarrow [\underbrace{(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r})} \vee \underbrace{(p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})}]$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge \underbrace{(r \vee \bar{r})}_{V}] \vee [\underbrace{(p \vee \bar{p})}_{V} \wedge (\bar{q} \wedge \bar{r})]$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge q)] \vee [(\bar{q} \wedge \bar{r})]$$

$$\Leftrightarrow (p \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{r}) \wedge \underbrace{(q \vee \bar{q})}_{V} \wedge (q \vee \bar{r})$$

$$\Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (r \Rightarrow p)$$

Luego $s \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ ▨

2^da^ Solución:
La haremos mediante la tabla de verdad.

p	q	r	s	$r \Rightarrow p$	$s \Rightarrow (r \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

Listo ! ▨

P3/ (a) Los luctuosos hechos acaecidos en la mansión XX han conducido a la brigada de homicidios a detener a 3 sicarios sospechosos del deleznable crimen. Para no enlodar a las inocentes familias de los susodichos, en lo que sigue nos referiremos a ellos anónimamente como S1, S2 y S3.
Durante el interrogatorio las declaraciones de los sospechosos fueron las siguientes:

S1: "S2 es culpable y S3 es inocente"
S2: "Si S1 es culpable, entonces S3 es también culpable."
S3: "Yo soy inocente, pero alguno de los otros dos es culpable"

Suponiendo que los inocentes dijeron la verdad y los culpables mintieron, determine quienes son los culpables. Justifique matemáticamente su respuesta. (Control 1, 1994)

(b) Demuestre, mediante reemplazos utilizando tautologías (teoremas lógicos) conocidas, que:

$$(*)\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow [\overline{(q \wedge r)} \Rightarrow \overline{(p \wedge r)}]$$ (Control 1, 1994)

Solución:

(a) Definamos las siguientes proposiciones lógicas:
p = "S1 es inocente", q = "S2 es inocente" y r = "S3 es inocente"

De esta manera los testimonios se reducen a:
$S_1: \bar{q} \wedge r \quad S_2: \bar{p} \Rightarrow \bar{r} \quad S_3: r \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$

Como los inocentes dicen la verdad y los culpables mienten tenemos las siguientes verdades:

(1) $p \Leftrightarrow \bar{q} \wedge r$
(2) $q \Leftrightarrow (\bar{p} \Rightarrow \bar{r})$
(3) $r \Leftrightarrow r \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$

Paso clave: Nos hemos dado cuenta de que la inocencia de los sospechosos es equivalente a la verdad de sus testimonios.

Ahora nuestro objetivo es encontrar los valores de verdad de p, q y r tal que se cumplan (1), (2) y (3).

Caso 1: $p \Leftrightarrow V$
Luego por (1), $\bar{q} \wedge r$ es V. $\therefore$ $\bar{q}$ es V (q es F) y r es V

Así (2) ya no se cumple pues
$q \Leftrightarrow F$ y $(\bar{p} \Rightarrow \bar{r}) \Leftrightarrow (F \Rightarrow F) \Leftrightarrow V$.

Caso 2: Luego, necesariamente $p \Leftrightarrow F$
De (2) podemos decir que
$q \Leftrightarrow (V \Rightarrow \bar{r}) \Leftrightarrow \sim V \vee \bar{r} \Leftrightarrow F \vee \bar{r} \Leftrightarrow \bar{r}$

Luego $q \Leftrightarrow \bar{r}$ (O sea q y $\bar{r}$ o son ambos falsos o ambos verdaderos)

Finalmente de (1) $\underbrace{p}_{F} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \bar{q} \wedge r$ concluimos que como $q \Leftrightarrow \bar{r}$ o equivalentemente $\bar{q} \Leftrightarrow r$ ($\bar{q}$ y r ambos V o ambos F)

... entonces $\bar{q}$ y r son ambos falsos (si ambos fueran verdaderos no se cumpliría (*))

$\therefore p \Leftrightarrow F$, $\underbrace{\bar{q} \Leftrightarrow F}_{q \Leftrightarrow V}$ y $r \Leftrightarrow F$

Luego: S1 es culpable, S2 es inocente y S3 es culpable ▨

(b) Si $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow F$ la afirmación (*) es directamente cierta

Si $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$ entonces $\sim p \vee q$ es V

Pdq: $[(\overline{q \wedge r}) \Rightarrow (\overline{p \wedge r})]$ es V.

o sea que

$(q \wedge r) \vee (\overline{p \wedge r})$ es V distribuyo sobre

Pero $[(q \wedge r) \vee (\overline{p \wedge r})] \Leftrightarrow [(q \wedge r) \vee (\bar{p} \vee \bar{r})]$

$$\Leftrightarrow [\underbrace{\underbrace{(q \vee \bar{p}}_{V} \vee \bar{r})}_{V} \wedge \underbrace{(r \vee \bar{p} \vee \bar{r})}_{\underbrace{\underbrace{(r \vee \bar{r}}_{V} \vee \bar{p})}_{V}}] \Leftrightarrow V$$ ▨

Pues $p \Rightarrow q$ es V.

P4 (a) Reduzca la proposición lógica

$$s \Leftrightarrow p \wedge [((r \vee \sim q) \wedge \sim p) \vee ((s \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q))]$$

(Control 1, 1991)

(b) Simplifique

$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)$

(c) Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q, r y s sabiendo que la proposición

$$(s \Rightarrow (\bar{r} \vee r)) \Rightarrow (\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge s \wedge \bar{r})$$ es verdadera.

(Control 1, 1999)

Solución:

(a) $s \Leftrightarrow [p\wedge(r\vee\sim q)\wedge\sim p] \vee [p\wedge(s\vee\sim q)\wedge(\sim p\vee q)]$

Pues $(p\wedge\sim p)\Leftrightarrow F$

$$\Leftrightarrow [\underbrace{F\wedge(r\vee\sim q)}_{F}] \vee [(s\vee\sim q)\wedge(\underbrace{\underbrace{(p\wedge\sim p)}_{F}\vee(p\wedge q)}_{(p\wedge q)})]$$

$$\Leftrightarrow F\vee[(s\vee\sim q)\wedge(p\wedge q)]$$

$$\Leftrightarrow [(s\vee\sim q)\wedge p\wedge q] \Leftrightarrow [\underbrace{(s\wedge q)\vee\underbrace{(q\wedge\sim q)}_{F}}_{s\wedge q}]\wedge p$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge s) \blacksquare$$

- (b) Primero notemos que:

$$(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)]\Leftrightarrow \overbrace{[(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee p)]}^{\text{Primera forma del "}\Leftrightarrow\text{"}}$$

$$\Leftrightarrow[(\sim p\wedge\sim q)\vee\underbrace{(\sim p\wedge p)}_{F}\vee\underbrace{(q\wedge\sim q)}_{F}\vee(q\wedge p)]$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{[(\sim p\wedge\sim q)\vee(p\wedge q)]}_{\text{Segunda forma del "}\Leftrightarrow\text{"}}$$

Ahora: $(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\sim q\wedge\sim r)\vee(\sim p\wedge q\wedge\sim r)\vee(\sim p\wedge\sim q\wedge r)$

$$\Leftrightarrow[p\wedge[\underbrace{(q\wedge r)\vee(\sim q\wedge\sim r)}_{(q\Leftrightarrow r)\leftarrow\text{Segunda forma.}}]]\vee[\sim p\wedge[(q\wedge\sim r)\vee(\sim q\wedge r)]]$$

$$\Leftrightarrow[p\wedge(q\Leftrightarrow r)]\vee[\sim p\wedge\underbrace{[\sim(\sim q\vee r)\vee\sim(q\vee\sim r)]}_{\sim[\underbrace{(\sim q\vee r)\wedge(q\vee\sim r)}_{(q\Leftrightarrow r)\leftarrow\text{Primera forma}}]}]$$

$$\Leftrightarrow[[p\wedge(q\Leftrightarrow r)]\vee[\sim p\wedge\sim(q\Leftrightarrow r)]]\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Por Segunda forma}\\ \text{del "}\Leftrightarrow\text{"}}}{\Leftrightarrow}[p\Leftrightarrow(q\Leftrightarrow r)] \blacksquare$$

(c) Notemos que $[s\Rightarrow(\bar{r}\vee r)]\Leftrightarrow[\sim s\vee\underbrace{(\bar{r}\vee r)}_{V}]\Leftrightarrow V$

Luego $\overline{(p\Rightarrow q)}\wedge s\wedge\bar{r}$ es V

Así $\overline{(p\Rightarrow q)}$, s y $\bar{r}$ son V (Luego s es V y r es F)

P5 (a) (a.1) Construya la proposición lógica que es verdadera cuando exactamente una de las proposiciones p, q, r es verdadera. Entregue una forma reducida de la proposición.

(a.2) Compare la proposición obtenida en el pto anterior con la proposición $(p \veebar q) \veebar r$ donde
$$(p \veebar q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$$

(b) Suponga que las siguientes proposiciones son verdaderas:
$$(x \in A \wedge y \in B) \Rightarrow y \in A, \quad (x \notin A \vee y \in A) \Rightarrow y \notin B$$
Probar que $y \notin B$ es verdadera.

(PreControl 1, 1996)

Solución:

- (a) (a.1) Analizando el problema de la misma forma que el P2 (a), obtenemos la proposición:
$$(p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \quad \left(\begin{array}{l}\text{Esta es la} \\ \text{forma reducida}\end{array}\right)$$

(a.2) La tabla de verdad de $p \veebar q$ es:

se conoce como "o" exclusivo.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Luego $(p \veebar q) \veebar r$ no es la misma proposición de la parte (a.1) pues si p, q y r son verdaderas la proposición de (a.1) es falsa (por definición) y $(p \veebar q) \veebar r \Leftrightarrow (V \veebar V) \veebar V$
$$\Leftrightarrow F \veebar V \Leftrightarrow V \quad \blacksquare$$

(b) Definamos $p = $"$x \in A$", $q = $"$y \in B$" $r = $"$y \in A$"

Luego tendremos que

(1) $p \wedge q \Rightarrow r$

(2) $\bar{p} \vee r \Rightarrow \bar{q}$

(y debo demostrar que "$y \notin B$" $= \bar{q}$ es verdadera)

Caso 1: Si $\bar{q}$ es F $\Rightarrow \underbrace{\bar{p} \vee r}_{(p \Rightarrow r)}$ es F (pues si fuera verdadera, (2) sería falsa)

Pero en (1), $(p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge V \Leftrightarrow p$ y por lo tanto
$(1) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$ es V (Contradicción)

Caso 2: Si $\bar{q}$ es V (Que es lo cierto)

$\Rightarrow q$ es F y en (1) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [\overbrace{(p \wedge F)}^{F} \Rightarrow r] \Leftrightarrow V$

y en (2) $[(\bar{p} \vee r) \Rightarrow \bar{q}] \Leftrightarrow [(\bar{p} \vee r) \Rightarrow V] \Leftrightarrow V$

P6 (a) Sean p, q, r y s proposiciones. Se sabe que s es verdadera y que

$$s \Rightarrow ((\bar{p} \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$$ es verdadera.

Probar que $q \vee r$ es verdadera

(Control 1, 2000)

(b) Sean p, q, r tres proposiciones tales que r es falsa, $(p \Leftrightarrow \bar{q})$ es verdadera y $q \Rightarrow r$ es verdadera. Deduzca el valor de verdad de p.

(c) Probar que toda proposición compuesta formada a partir de disjunciones, conjunciones y negaciones de proposiciones simples es equivalente con una proposición donde solo aparecen los conectivos lógicos de implicancia ($\Rightarrow$) y negación ($\sim$).

Solución:

(a) Como s es V, necesariamente $(\bar{p} \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ es V

Además $[\bar{p} \Rightarrow q] \Leftrightarrow [\bar{q} \Rightarrow p]$ (Luego $\bar{p} \Rightarrow q$ es V y $p \Rightarrow r$ es V)

contrarecíproca.

Así, $\bar{q} \Rightarrow p$ y $(p \Rightarrow r)$ son V y por transitividad de la $(\Rightarrow)$ tenemos que $\underbrace{\bar{q} \Rightarrow r}_{q \vee r}$ es V ▨

(b) r es F y como $q \Rightarrow \underbrace{r}_{F}$ es V necesariamente q es F

y como $p \Leftrightarrow \underbrace{\sim q}_{V}$ es V, concluimos que p es verdadera.

(c) Notemos que:

(1) $p \vee q \Leftrightarrow [\sim p \Rightarrow q]$

(2) $p \wedge q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \overset{\text{Por (1)}}{\Leftrightarrow} \sim(p \Rightarrow \sim q)$

(3) $\sim p \Leftrightarrow \sim p$

Hemos escrito los conectivos $\vee$, $\wedge$ y $\sim$ en función de "$\Rightarrow$" y "$\sim$".

Luego, si tenemos una proposición compuesta formada por "$\vee$", "$\wedge$" y "$\sim$" la podemos reemplazar (usando (1), (2) y (3)) por una proposición equivalente que solo tiene "$\Rightarrow$" y "$\sim$" ▨

P7 Sean p y q proposiciones. Se define la proposición "ni p ni q", la que denotaremos por $p \downarrow q$, por la siguiente tabla de verdad.

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

(a) Probar que $\sim p \Leftrightarrow p \downarrow p$ y que $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim(p \downarrow q)$

(b) Expresar las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $p \wedge q$ usando solo $\downarrow$ y $\sim$.

Solución:

(a) (1) $\sim p \Leftrightarrow p \downarrow p$

p	$\sim p$	$p \downarrow p$	$\sim p \Leftrightarrow p \downarrow p$
V	F	F	V
F	V	V	V

(2) $p \vee q \Leftrightarrow \sim(p \downarrow q)$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \downarrow q)$	$(p \vee q) \Leftrightarrow \sim(p \downarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

(b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q \overset{\text{Por (2)}}{\Leftrightarrow} \sim(\sim p \downarrow q)^{(*)}$

$(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \underset{\text{Por (2)}}{\Leftrightarrow} \sim[\sim(\sim p \downarrow \sim q)] \Leftrightarrow (\sim p \downarrow \sim q)^{(**)}$

Obs: Notar que podríamos escribir $(*)$ y $(**)$ sólo en función de $\downarrow$ usando (1).

P8 (a) Sean p, q, r proposiciones. Averiguar si la equivalencia $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge q]$ puede ser verdadera sin que lo sea la implicancia $p \Rightarrow q$.

(b) Sean p, q, r, s proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que las siguientes proposiciones son tautologías.

(b.1) $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$

(b.2) $[(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)]$

(b.3) $[(p\Rightarrow\bar{q})\wedge(r\Rightarrow q)]\Rightarrow(p\Rightarrow\bar{r})$
(b.4) $\Big((p\Rightarrow q)\wedge[r\wedge(r\Rightarrow\bar{q})]\Big)\Rightarrow\bar{p}$

(b.5) $[(p\wedge\sim q)\Rightarrow\sim p]\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)$
(b.6) $[(p\wedge q)\Rightarrow r]\Leftrightarrow[(p\wedge\sim r)\Rightarrow\sim q]$

Solución:
(a) La pregunta es:
¿Es posible que $\overbrace{[p\vee(q\wedge r)]}^{(1)}\Leftrightarrow\overbrace{[(p\vee r)\wedge q]}^{(2)}$ sea V
y $p\Rightarrow q$ sea F al mismo tiempo.?

Respuesta: NO!
Notemos que si $p\Rightarrow q$ es F, entonces p es V y q es F
Por lo tanto
(1) : $[p\vee(q\wedge r)]\Leftrightarrow[V\vee(q\wedge r)]\Leftrightarrow V$
(2) : $[(p\vee r)\wedge q]\Leftrightarrow[(p\vee r)\wedge F]\Leftrightarrow F$
Luego (1) no puede ser equivalente a (2). ▨

(b) (b.1) Supongamos que $(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)$ es verdadera
(si es falsa, la afirmación de (b.1) es directamente cierta)
Luego $(p\Rightarrow q)$ es V$^{(*)}$ y $(r\Rightarrow s)$ es V$^{(**)}$
Pdq: $(p\wedge r)\Rightarrow(q\wedge s)$
Pero
$(p\wedge r)\Rightarrow p\overset{(*)}{\Rightarrow}q$
y $(p\wedge r)\Rightarrow r\overset{(**)}{\Rightarrow}s$
$\therefore (p\wedge r)\Rightarrow(q\wedge s)$ ▨

(b.2) Si $(p\vee q)\Leftrightarrow(p\wedge r)$ entonces

$q\Rightarrow(p\vee q)\Leftrightarrow(p\wedge r)\Rightarrow p$ (O sea $q\Rightarrow p$)
$p\Rightarrow(p\vee q)\Leftrightarrow(p\wedge r)\Rightarrow r$ (O sea $p\Rightarrow r$)
Luego $(q\Rightarrow p)\wedge(p\Rightarrow r)$ es V ▨

(b.3) Como $[r\Rightarrow q]\Leftrightarrow[\bar{q}\Rightarrow\bar{r}]$ (Contrarecíproca)

$[(p\Rightarrow\bar{q})\wedge(r\Rightarrow q)]\Leftrightarrow[(p\Rightarrow\bar{q})\wedge(\bar{q}\Rightarrow\bar{r})]\Rightarrow(p\Rightarrow\bar{r})$ ▨
Transitividad.

(b.4) Si tenemos que $(p\Rightarrow q)\wedge[r\wedge(r\Rightarrow\bar{q})]$ es V,
entonces $(p\Rightarrow q)$, r y $(r\Rightarrow\bar{q})$ son V
Luego como r es V y $(r\Rightarrow\bar{q})$ también, entonces
$\bar{q}$ es V (q es F)
Finalmente como $p\Rightarrow q$ es V, entonces p es F ($\bar{p}$ es V) ▨

(b.5) $[(p\wedge\sim q)\Rightarrow\sim p]\Leftrightarrow\sim(p\wedge\sim q)\vee\sim p$

$\Leftrightarrow\sim p\vee q\vee\sim p\Leftrightarrow\sim p\vee q\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)$

Pues $\sim p\vee\sim p\Leftrightarrow\sim p$

(b.6) $[(p\wedge q)\Rightarrow r]\Leftrightarrow[\sim(p\wedge q)\vee r]$

$\Leftrightarrow[\sim p\vee\sim q\vee r]$

$\Leftrightarrow[\sim(p\wedge\sim r)\vee\sim q]\Leftrightarrow[(p\wedge\sim r)\Rightarrow\sim q]$

P9 (a) Sean p,q,r proposiciones tales que $(\sim p\vee q)\Rightarrow r$ es falsa. Entregar el valor de verdad de las siguientes proposiciones

- (a.1) $\sim q\Rightarrow\sim p$
  (a.2) $r\Rightarrow(p\Leftrightarrow\sim(q\vee r))$

(b) Sean las proposiciones p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6 tales que $[(p_1\veebar p_2)\Rightarrow(p_3\Rightarrow p_4)]$ es falsa. Determinar el valor de verdad de:

(b.1) $(p_5\Rightarrow p_6)\vee(p_1\vee p_2)$

(b.2) $[(p_5\Rightarrow p_2)\vee\sim p_1]\Rightarrow(p_4\vee p_3)$

(b.3) $\sim[(p_6\vee p_5)\wedge(p_1\wedge p_2)]\Leftrightarrow(p_4\Rightarrow p_3)$

- (c) Si q y r son proposiciones no equivalentes. Determine el valor de verdad de la proposición
  $[\sim(q\vee r)\wedge(q\wedge r)]\Rightarrow[(p\wedge s)\vee(\sim s\vee q)]$

Solución:

(a) Como $(\sim p\vee q)\Rightarrow r$ es $\mathcal{F}$, entonces $\sim p\vee q$ es V y r es $\mathcal{F}$

(a.1) Es V por lo anterior (O sea $p\Rightarrow q$ es V o lo que es lo mismo $\sim q\Rightarrow\sim p$ es V)

(a.2) Como r es $\mathcal{F}$ la proposición de (a.2) es V

(b) Como $[(p_1\veebar p_2)\Rightarrow(p_3\Rightarrow p_4)]$ es $\mathcal{F}$ entonces
$p_1\veebar p_2$ es V
y $p_3\Rightarrow p_4$ es $\mathcal{F}$ (Por lo tanto p_3 es V y p_4 es $\mathcal{F}$)

Además $p_1\veebar p_2\Leftrightarrow(p_1\vee p_2)\wedge\sim(p_1\wedge p_2)$ es V, por lo que $(p_1\vee p_2)$ es V y $\sim(p_1\wedge p_2)$ es V ($p_1\wedge p_2$ es $\mathcal{F}$)

(b.1) $(p_5 \Rightarrow p_6) \vee (p_1 \vee p_2) \Leftrightarrow (p_5 \Rightarrow p_6) \vee V \Leftrightarrow V$ ▨

(b.2) $\left[\left[(p_5 \Rightarrow p_2) \vee \sim p_1\right] \Rightarrow \underbrace{\underbrace{(p_4 \vee p_3)}_{F \vee V}}_{V}\right] \Leftrightarrow V$ ▨

(b.3) $\underbrace{\sim \underbrace{\left[(p_6 \vee p_5) \wedge \underbrace{(p_1 \wedge p_2)}_{F}\right]}_{F}}_{V} \Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{(p_4 \Rightarrow p_3)}_{F \Rightarrow V}}_{V}$ ▨

Luego la equivalencia es verdadera.

- (c) Notemos que $[\sim(q \vee r) \wedge (q \wedge r)]$

$$\Leftrightarrow [\sim q \wedge \sim r \wedge q \wedge r]$$
$$\Leftrightarrow [\underbrace{(\sim q \wedge q)}_{F} \wedge \underbrace{(r \wedge \sim r)}_{F}] \Leftrightarrow F$$

Luego la proposición de (c) es cierta pues
$$(F \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$$
$\forall$ proposición q

Notar que la condición de q y r no equivalentes no es necesaria ($q \Leftrightarrow \sim r$) ▨

- **P10** Sea S un conjunto de números reales. Se dice que x es un punto aislado de S si existe un número real positivo δ tal que para todo punto $y \in S$ la distancia entre x e y es mayor o igual que δ

(a) Escribir la definición de punto aislado usando cuantificadores.
(b) Demostrar que si $x \in S$, entonces x no es punto aislado de S
(c) Sea $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Probar que el origen no es un punto aislado de S

Solución:

(a) x es pto aislado $\Leftrightarrow (\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in S)\ |x-y| \geq \delta$

(b) Notemos que $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$

Por lo tanto

x "no es" punto aislado $\Leftrightarrow \sim \left[(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in S)\ |x-y| \geq \delta\right]$

$\Leftrightarrow (\forall \delta \in \mathbb{R}^+)(\exists y \in S)\ |x-y| < \delta$

Ahora si $x \in S$, $(\forall \delta \in \mathbb{R}^+)(\exists \underbrace{y = x \in S}_{\text{(pues } x \in S)})\ \underbrace{|x-y|}_{0\ (\text{Pues } x=y)} < \delta$

(c) "0" (el origen) no es un punto aislado de S $\Leftrightarrow (\forall \delta \in \mathbb{R}^+)(\exists y \in S)\ |0-y| < \delta$

- La afirmación $(\forall \delta \in \mathbb{R}^+)(\exists y \in S)\ |y| < \delta$ es verdadera pues dado $\delta \in \mathbb{R}^+$ basta tomar $y = \frac{1}{m}$ con $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > \frac{1}{\delta}$

Así $|y| = \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{m} < \delta$ $\left(\text{Pues } m > \frac{1}{\delta}\right)$ ▨

P11 Sean p, q, r y s proposiciones. Pruebe sin usar tablas de verdad que:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})] \Rightarrow [\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)]$$

(Control 1, 2001)

- Solución:

1era Solución:

$$\left[[(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})] \Rightarrow [\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s)]\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[[(\sim p \vee q) \wedge (s \vee \sim r)] \Rightarrow [\sim p \vee \sim r \vee (q \wedge s)]\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\sim[(\sim p \vee q) \wedge (s \vee \sim r)] \vee [\sim p \vee \sim r \vee (q \wedge s)]\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[[\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(s \vee \sim r)] \vee [\sim p \vee \sim r \vee (q \wedge s)]\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[[(p \wedge \sim q) \vee (\sim s \wedge r)] \vee [\sim p \vee \sim r \vee (q \wedge s)]\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[(p \wedge \sim q) \vee (\sim s \wedge r) \vee \sim p \vee \sim r \vee (q \wedge s)\right]$$

Con más habilidad (experiencia) pueden saltarse los pasos intermedios.

$$\Longleftrightarrow \Big[\underbrace{[\underbrace{(p\vee\sim p)}_{V}\wedge(\sim q\vee\sim p)]}_{(\sim q\vee\sim p)}\vee\underbrace{[(\sim s\vee\sim r)\wedge\underbrace{(r\vee\sim r)}_{V}]}_{(\sim s\vee\sim r)}\vee(q\wedge s)\Big]$$ (14)

$$\Longleftrightarrow [\sim q\vee\sim p\vee\sim s\vee\sim r\vee(q\wedge s)]$$ Reordenamiento

$$\Longleftrightarrow \underbrace{[\sim p\vee\sim r\vee\underbrace{\underbrace{\sim q\vee\sim s}_{\sim(q\wedge s)}\vee(q\wedge s)]}_{V}}_{V}$$

V $\blacksquare$

2da Solución:

Asumamos que $(p\Rightarrow q)\wedge(\bar{s}\Rightarrow\bar{r})$ es verdadera. (*)

Pdq: $\bar{p}\vee\bar{r}\vee(q\wedge s)$ es verdadera.

o sea que $(\bar{p}\vee\bar{r}\vee q)\wedge(\bar{p}\vee\bar{r}\vee s)$ es V

↳ $\bar{p}\vee\bar{r}$ distribuye sobre $(q\wedge s)$

Pero $(p\Rightarrow q)$ es V (por *), o sea $\bar{p}\vee q$ es V

y $(\bar{s}\Rightarrow\bar{r})$ es V (por *), o sea $s\vee\bar{r}$ es V

Así: $(\bar{p}\vee\bar{r}\vee q)\wedge(\bar{p}\vee\bar{r}\vee s)$ Reordenamiento

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\underbrace{(\underbrace{\bar{p}\vee q}_{V}\vee\bar{r})}_{V}\wedge\underbrace{(\bar{p}\vee\underbrace{s\vee\bar{r}}_{V})}_{V}}_{V}$$

V $\blacksquare$

P12 (a) Se define el conectivo lógico $p|q \Leftrightarrow \bar{p}\vee\bar{q}$. Escriba usando sólo el conectivo "|", proposiciones equivalentes a las siguientes:

(i) $\bar{p}$ (ii) $p\vee q$ (iii) $p\wedge q$

(b) Sean las proposiciones r, s siguientes:

$r: (\forall x)\ p(x)\Rightarrow q$

$s: ((\forall x)\ p(x))\Rightarrow q$

(i) Niegue la proposición r

(ii) Niegue la proposición s
(iii) De las implicancias, $(r \Rightarrow s)$ y $(s \Rightarrow r)$, determine la que corresponde a una tautología. Justifique su elección. (Control 1, 2002)

Solución:

(a) (i) Notemos que $p|p \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{p} \Leftrightarrow \bar{p}$. Luego $p|p \Leftrightarrow \bar{p}$

(ii) Notemos que $p \vee q \Leftrightarrow (\overline{\bar{p}}) \vee (\overline{\bar{q}}) \Leftrightarrow \bar{p} | \bar{q}$
$\Leftrightarrow (p|p) | (q|q)$

Por definición de $|$ — Por (a)(i)

(iii) Como $p \wedge q \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$, se tiene que

$$p \wedge q \Leftrightarrow ((p|q)|(p|q))$$

pues por (i)

$$\overline{\bar{p} \vee \bar{q}} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) | (\bar{p} \vee \bar{q}) \Leftrightarrow (p|q)|(p|q)$$

Pues $p|q \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ por definición

(b) (i)
$$\sim r \Leftrightarrow \sim[(\forall x)(p(x) \Rightarrow q)]$$
$$\Leftrightarrow \sim[(\forall x)(\overline{p(x)} \vee q)]$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)\,\overline{(\overline{p(x)} \vee q)} \Leftrightarrow (\exists x)(p(x) \wedge \bar{q})$$

Observación: Es lo mismo anotar $\bar{p}$ o anotar $\sim p$

(ii)
$$\sim s \Leftrightarrow \sim[((\forall x)\,p(x)) \Rightarrow q]$$
$$\Leftrightarrow \sim[\sim((\forall x)\,p(x)) \vee q]$$
$$\Leftrightarrow ((\forall x)\,p(x)) \wedge \bar{q}$$

(iii) Demostraremos que $r \Rightarrow s$, o sea tendremos que r es V e intentaremos demostrar que s también lo es. Como r es V, tenemos que sea cual sea x, siempre $p(x) \Rightarrow q$. (1)

buscamos demostrar que $((\forall x)\, p(x)) \Rightarrow q$.
(O sea que si $p(x)$ se cumple siempre, entonces q también) (2)

Resumiendo, sabemos que $p(x) \Rightarrow q$ siempre. (Por (1))

y que $p(x)$ se cumple siempre (2), por lo tanto como $p(x) \Leftrightarrow V$, se tiene $q \Leftrightarrow V$ (Por (1))
Luego estamos listos pues nuestro objetivo era demostrar que q era V!

Propuesto: En vez de demostrar $r \Rightarrow s$, demuestren $\overline{s} \Rightarrow \overline{r}$ (la contrarecíproca) que es una proposición equivalente (Para ello use (2)(i) y (2)(ii)) $\blacksquare$

Primero, una aclaración; esta colección de guías con problemas resueltos no son para que el alumno lea la solución sin haberse dado el placer de hacerlo por sí mismo. Así será mucho más productiva. Al final el objetivo es que sean capaces de hacer la guía sin tener que mirar nuevamente la solución (o sea pueden leer la solución, pero deben ser capaces de hacerlo por lo menos una vez sin mirar "la solución" de nuevo). Pongo "solución" entre comillas pues esta solución "no es única", en Matemáticas siempre hay más de una solución al problema y el no coincidir con la solución que da esta guía no significa que su solución esté mala, de hecho es muy probable que su solución sea mucho más creativa o más simple que la que entrega esta modesta guía. Aprovechen estas semanas para buscar guías, estudiar los apuntes, buscar libros en la biblioteca o bajar materiales en la web, como también participar de las actividades, integrar el grupo de AJEDREZ (En el Hall Sur - 1er Piso) o integral el grupo de astronomía (Grupo AURIGA) entre muchos otros. Hagan amigos, formen grupos de estudio, pero por sobre todo no pierdan el objetivo principal de sus vidas "SER FELICES". No puedo dejar de desearles la mejor de las suertes y felicitarlos por ser parte de la Universidad más grandiosa del país, por su excelencia, por sus académicos pero por sobre todo por ustedes, la nueva generación de la República Independiente de Beauchef.

¡Felicitaciones!

David Painequeo S.

Próxima Edición: "Teoría de Conjuntos"

Dudas: Escribir a: dpainequ@yahoo.com