Guía de Álgebra
Relaciones, Inducción y Sumatorias.

P1] Sea E un conjunto no vacío. Sea $\mathcal{P}$ una relación refleja y transitiva definida sobre E. Se define una nueva relación $\mathcal{R}$ sobre E por:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}a$$

(i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(ii) Sea $E/R = \{[a]_R : a \in E\}$ donde $[a]_R = \{b \in E : a\mathcal{R}b\}$

(ii.1) Probar que si $a' \in [a]_R$ y $b' \in [b]_R$, entonces

$$a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a'\mathcal{P}b'$$

(ii.2) Se define la relación Q sobre E/R por:

$$[a]_R\, Q\, [b]_R \Leftrightarrow a\mathcal{P}b.$$

Probar que Q es una relación de orden sobre E/R.

Solución:

(i) Pdq $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva.

$\mathcal{R}$ refleja: $(\forall a \in E)$ $a\mathcal{R}a$ es cierto pues

$$a\mathcal{R}a \Leftrightarrow a\mathcal{P}a \wedge a\mathcal{P}a \Leftrightarrow V \wedge V \Leftrightarrow V$$

pues $\mathcal{P}$ es "refleja"

$\mathcal{R}$ simétrica: Tenemos que

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a\mathcal{P}b \overset{\text{conmutativo}}{\wedge} b\mathcal{P}a \Leftrightarrow b\mathcal{P}a \wedge a\mathcal{P}b \Leftrightarrow b\mathcal{R}a$$

$\mathcal{R}$ transitiva: Notemos que:

$$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Leftrightarrow [(a\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}a) \wedge (b\mathcal{P}c \wedge c\mathcal{P}b)]$$

reordeno y asocio

$$\Leftrightarrow [\underbrace{(a\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}c)}_{\Rightarrow a\mathcal{P}c^{(*)}} \wedge \underbrace{(c\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}a)}_{\Rightarrow c\mathcal{P}a^{(*)}}]$$

$$\Rightarrow a\mathcal{P}c \wedge c\mathcal{P}a \Leftrightarrow a\mathcal{R}c \quad \blacksquare$$

(*) Pues $\mathcal{P}$ es transitiva.

(ii) (ii.1) Sabemos que $a' \in [a]_R \Leftrightarrow a'\mathcal{R}a \Leftrightarrow a'\mathcal{P}a \wedge a\mathcal{P}a'$
y que $b' \in [b]_R \Leftrightarrow b'\mathcal{R}b \Leftrightarrow b'\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}b'$

Luego sabemos que ① $a'\mathcal{P}a$ ② $a\mathcal{P}a'$ ③ $b'\mathcal{P}b$ ④ $b\mathcal{P}b'$

Pdq $a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a'\mathcal{P}b'$

($\Rightarrow$) Sabemos que $a\mathcal{P}b$, pero por ① y ④ tenemos que:

$$\underbrace{a'\mathcal{P}a}_{①} \wedge \underbrace{a\mathcal{P}b}_{\text{lo asumo cierto}} \wedge \underbrace{b\mathcal{P}b'}_{④} \Rightarrow a'\mathcal{P}b'$$

Pues $\mathcal{P}$ es transitiva

Obtengo lo pedido.

(⇐) Sabemos que $a'\mathcal{P}b'$, pero por ② y ③ se tiene que: ②
$$a\mathcal{P}a' \wedge a'\mathcal{P}b' \wedge b'\mathcal{P}b \Rightarrow a\mathcal{P}b$$
Pues $\mathcal{P}$ es transitiva.

(ii.2) Aunque no lo piden, notemos que Q está bien definida, o sea que la afirmación $[a]_R Q [b]_R$ no depende del representante (en este caso a y b) de la $[a]_R$ y $[b]_R$ considerado, es decir:

$$\text{Si } [a]_R = [a']_R \text{ y } [b]_R = [b']_R \Rightarrow \Big[\underbrace{[a]_R Q [b]_R}_{a\mathcal{P}b} \Leftrightarrow \underbrace{[a']_R Q [b']_R}_{a'\mathcal{P}b'}\Big]$$

distintos representantes para la misma clase.

Pero si $[a]_R = [a']_R \Rightarrow a' \in [a]_R$ (De hecho es equivalencia).
y $[b]_R = [b']_R \Rightarrow b' \in [b]_R$
$$\underset{(ii.1)}{\Longrightarrow} [a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a'\mathcal{P}b'] \Leftrightarrow [[a]_R Q [b]_R \Leftrightarrow [a']_R Q [b']_R]$$

Probemos ahora que Q es rel. de orden:

Q refleja: $[a]_R Q [a]_R \Leftrightarrow a\mathcal{P}a \Leftrightarrow V$
Pues $\mathcal{P}$ refleja.

Q antisimétrica: $[a]_R Q [b]_R \wedge [b]_R Q [a]_R$
$$\Leftrightarrow [a\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}a] \Leftrightarrow a\mathcal{R}b$$
$$\Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$$

Q transitiva: $[a]_R Q [b]_R \wedge [b]_R Q [c]_R$
$$\Rightarrow a\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}c$$
$\mathcal{P}$ transitiva $\Rightarrow a\mathcal{P}c \Leftrightarrow [a]_R Q [c]_R$ ▨

P2 Sean X, Y conjuntos y $f: X \to Y$ una función.

(i) Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida sobre Y. Se define en X la relación preimagen de $\mathcal{R}$ que notamos $f^{-1}(R)$ por:
$$x f^{-1}(R) \bar{x} \Leftrightarrow f(x) \mathcal{R} f(\bar{x})$$

(i.1) Probar que $f^{-1}(R)$ es una relación de equivalencia en X.

(i.2) Probar que $[x]_{f^{-1}(R)} = f^{-1}([f(x)]_R)$ para todo $x \in X$

(ii) Suponga que ahora $\mathcal{R}'$ es una relación de equivalencia en X y que f es sobreyectiva. Definimos en Y la relación imagen por:
$$y_1 f(R') y_2 \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2 \wedge x_1 R' x_2$$

(ii.1) Probar que si f es inyectiva entonces $f(R')$ es de equivalencia y además $\mathcal{R}' = f^{-1}(f(R))$.

(ii.2) Construya un ejemplo donde f no sea inyectiva y $f(R')$ no sea de equivalencia. ¿Qué propiedad es la que no se mantiene en general? ③

Solución:

(i) (i.1) Pdq $f^{-1}(R)$ es rel. de equivalencia.

$f^{-1}(R)$ refleja: En efecto

$$a\, f^{-1}(R)\, a \Leftrightarrow f(a)\, R \underbrace{f(a)}_{\in Y} \Leftrightarrow V$$

Pues R es de equivalencia en Y (en particular R es refleja)

$f^{-1}(R)$ simétrica: $a\, f^{-1}(R)\, b \Leftrightarrow f(a)\, R\, f(b)$

$$\xRightarrow{R \text{ simétrica}} f(b)\, R\, f(a) \Leftrightarrow b\, f^{-1}(R)\, a$$

$f^{-1}(R)$ transitiva: $a\, f^{-1}(R)\, b \wedge b\, f^{-1}(R)\, c$

$$\Leftrightarrow f(a)\, R\, f(b) \wedge f(b)\, R\, f(c)$$

$$\xRightarrow{R \text{ transitiva}} f(a)\, R\, f(c) \Leftrightarrow a\, f^{-1}(R)\, c$$

(i.2) Recordemos que por definición, dado $f: X \to Y$ y $B \subseteq Y$ entonces $a \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(a) \in B$ (Pinponeo)

Luego: $\bar{x} \in [x]_{f^{-1}(R)} \Leftrightarrow \bar{x}\, f^{-1}(R)\, x \Leftrightarrow f(\bar{x})\, R\, f(x)$ $\subseteq Y$

$$\Leftrightarrow f(\bar{x}) \in [f(x)]_R$$

Aquí usamos la definición de preimagen.

$$\Leftrightarrow \bar{x} \in f^{-1}([f(x)]_R) \quad ▨$$

(ii) (ii.1) Pdq $f(R')$ de equivalencia

$f(R')$ refleja: En efecto:

$$y\, f(R')\, y \Leftrightarrow \underbrace{\exists x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = y;\ f(x_2) = y \wedge x_1 R' x_2}$$

Esta afirmación es cierta pues como f es epiyectiva, dado $y \in Y$, $\exists x \in X$ tal que $f(x) = y$

Luego $\exists x_1 = x, x_2 = x$, $\underbrace{f(x_1)}_{f(x)} = y$, $\underbrace{f(x_2)}_{f(x)} = y \wedge \underbrace{x_1 R' x_2}_{x R' x}$

cierto pues R' es de equiv. en X, en particular es refleja.

$f(R')$ simétrica: $y_1\, f(R')\, y_2 \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2 \wedge x_1 R' x_2$

$$\xLeftrightarrow{\text{pues } R' \text{ es simétrica}} \exists x_2, x_1 \in X,\ f(x_2) = y_2,\ f(x_1) = y_1 \wedge x_2 R' x_1$$

$$\Leftrightarrow y_2\, f(R')\, y_1$$

$f(R')$ transitiva: $y_1 f(R') y_2 \wedge y_2 f(R') y_3$

$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2 \ \wedge\ x_1 R' x_2$

$\wedge\ \exists \bar{x}_2, x_3 \in X,\ f(\bar{x}_2) = y_2,\ f(x_3) = y_3 \ \wedge\ \bar{x}_2 R' x_3$

Pero entonces $y_2 = f(x_2) = f(\bar{x}_2) \Rightarrow x_2 = \bar{x}_2$

Pues f inyectiva.

Luego $x_1 R' x_2 \wedge \bar{x}_2 R' x_3 \Leftrightarrow x_1 R' x_2 \wedge x_2 R' x_3 \Rightarrow x_1 R' x_3$.

R' transitiva

Así $\exists x_1, x_3 \in X,\ f(x_1) = y_1,\ f(x_3) = y_3 \ \wedge\ \underline{\underline{x_1 R' x_3}}$

$\Leftrightarrow y_1 f(R') y_3$ //

Pdq $R' = f^{-1}(f(R))$, o sea $x_1 R' x_2 \Leftrightarrow x_1 f^{-1}(f(R)) x_2$

Esta "no" es preimagen sino que es la relación preimagen definida en (i)

Pero $x_1 f^{-1}(f(R)) x_2 \Leftrightarrow f(x_1) f(R) f(x_2)$

$\Leftrightarrow \exists \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in X,\ f(\bar{x}_1) = f(x_1),\ f(\bar{x}_2) = f(x_2) \ \wedge\ \bar{x}_1 R' \bar{x}_2$

Pues f inyectiva $\Rightarrow \bar{x}_1 = x_1,\ \bar{x}_2 = x_2$ y $\bar{x}_1 R \bar{x}_2$

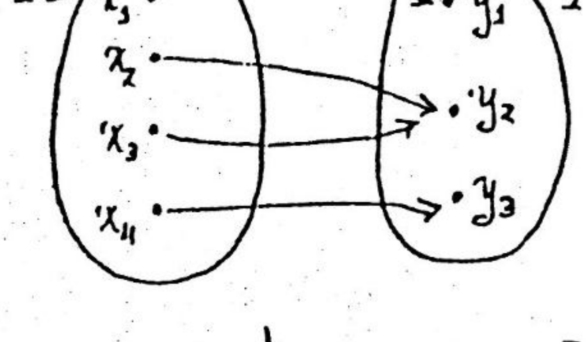
$\Rightarrow x_1 R' x_2$

Ahora así:

$x_1 R' x_2 \Rightarrow \exists \bar{x}_1 = x_1$ y $\bar{x}_2 = x_2,\ f(\bar{x}_1) = f(x_1),\ f(\bar{x}_2) = f(x_2) \ \wedge\ \underbrace{\bar{x}_1 R' \bar{x}_2}_{x_1 R' x_2}$

$\Leftrightarrow f(x_1) f(R) f(x_2) \Leftrightarrow x_1 f^{-1}(f(R)) x_2$

(ii.2) Sea f representada como sigue



y $R' = \{(x_1,x_2), (x_3,x_4), (x_2,x_1), (x_4,x_3), (x_1,x_1), (x_2,x_2), (x_3,x_3), (x_4,x_4)\}$

una rel. de equiv. (Pruébelo ∇)

Notemos que $y_1 f(R) y_2$ pues $\exists x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2 \ \wedge\ x_1 R' x_2$

Además $y_2 f(R) y_3$ pues $\exists x_3, x_4 \in X,\ f(x_3) = y_2,\ f(x_4) = y_3 \ \wedge\ x_3 R' x_4$

pero no es cierto que

$y_1 f(R) y_3$ (¿Porque?)

Luego falla la transitividad (la que en general falla) y por ende $f(R')$ no es relación de equivalencia ▨

P3] Sean A, B conjuntos no vacíos y $f: A \to B$ una función. (5)
Se define la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en A mediante:

$$x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$$

(No se le pide probar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia, simplemente use este hecho)

Anotaremos como A/R ← clases de equivalencia inducidas por $\mathcal{R}$ el conjunto cuociente de A por la relación de equivalencia $\mathcal{R}$. Definamos $g: A/R \to B$ como $g([x]_R) = f(x)$ y $h: A \to A/R$ por $h(x) = [x]_R$

(a) Demuestre que g es una función bien definida, y que es inyectiva.

(b) Demuestre que h es sobreyectiva (epiyectiva)

(c) Demuestre que $f = g \circ h$

(Control 3, 1994)

Antes pasaban la materia en otro orden.

Solución:

(a) Para probar que g esta bien definida debemos tener que

$$[x_1]_R = [x_2]_R \Rightarrow g([x_1]_R) = g([x_2]_R)$$

o sea que da lo mismo el representante de la clase que use.

Pero:

$$\begin{aligned}
[x_1]_R = [x_2]_R &\iff x_1 R x_2 \\
&\iff \overbrace{f(x_1)} = \overbrace{f(x_2)} \\
&\iff g([x_1]_R) = g([x_2]_R)
\end{aligned}$$

Luego $[x_1]_R = [x_2]_R \iff g([x_1]_R) = g([x_2]_R)$, por lo que son ciertas "2" implicancias: $(\Rightarrow)$ g bien definida

$(\Leftarrow)$ g inyectiva. (Lo acabamos de probar sin querer, uppss...) ▨

(b) Pdq h epiyectiva, o sea: $(h: A \to A/R)$

$$(\forall y \in A/R)(\exists x \in A)\ h(x) = y$$

Pero si $y \in A/R \Rightarrow y = [\bar{x}]$ para algún $\bar{x} \in A$

Luego tomando $x = \bar{x} \in A$, $h(x) = h(\bar{x}) = [\bar{x}] = y$ //

(La epiyección es tan clara que cuesta verla) ▨

(c) $f: A \to B$ $\quad h: A \to A/R \quad g: A/R \to B$

$$\Rightarrow g \circ h: A \to B$$

$$y\ (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g([x]) = f(x) \quad \forall x \in A$$

$$\therefore g \circ h = f$$ ▨

P4] Sea $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$. Sobre $\mathbb{N}^2$ se define la siguiente relación $\mathcal{R}$:

$$(n,m)\,\mathcal{R}\,(n',m') \iff n+m' = n'+m$$

(i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{N}^2$

(ii) Sea $\varphi : \mathbb{N}^2/R \to \mathbb{Z}$ tal que $\varphi([(n,m)]_R) = n-m$.
Demuestre que φ es una biyección.

(Control 2, 1993)

Solución:

(i) Notemos que

$$(n,m)\,R\,(n',m') \iff n+m' = n'+m$$
$$\iff n-m = n'-m' \quad \longleftarrow \text{Esta vamos a usar } (*)$$

Veamos que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

$\mathcal{R}$ refleja: $(a,a)\,R\,(a,a) \iff a-a=a-a \iff V$

$\mathcal{R}$ simétrica: $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff a-b=c-d \iff c-d=a-b \iff (c,d)\,\mathcal{R}\,(a,b)$.

$\mathcal{R}$ transitiva: $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \wedge (c,d)\,\mathcal{R}\,(e,f)$
$\iff a-b=c-d \wedge c-d=e-f$
$\Rightarrow a-b=e-f \iff (a,b)\,\mathcal{R}\,(e,f)$ ▨

(ii) Veamos que $[(n,m)]_R = [(n',m')]_R \iff \varphi([(n,m)]_R) = \varphi([(n',m')]_R)$

Recordemos que ($\Leftarrow$) nos dice que φ inyectiva y
($\Rightarrow$) nos dice que φ bien definida

$$[(n,m)]_R = [(n',m')]_R \iff (n,m)\,R\,(n',m')$$
$$\iff n-m = n'-m' \quad (\text{Por } *)$$
$$\iff \varphi([(n,m)]_R) = \varphi([(n',m')]_R)$$

Nos falta probar que $\varphi : \mathbb{N}^2/R \to \mathbb{Z}$ es una epiyección,
o sea que $(\forall y\in\mathbb{Z})(\exists\, [(n,m)]_R \in \mathbb{N}^2/R)\ \varphi([(n,m)]_R) = y$

Si $y \geq 0$, tomando $[(y,0)]_R \in \mathbb{N}^2/R$ tenemos $\varphi([y,0]_R) = y-0 = y$
pertenece $\longrightarrow$ $\in \mathbb{N}$, $\in \mathbb{N}$

Ahora si $y<0$, tomamos $[(0,-y)]_R \in \mathbb{N}^2/R$ y tenemos $\varphi([0,-y]_R) = 0-(-y) = y$
¡OJO! $\longrightarrow$ $0\in\mathbb{N}$, $-y\in\mathbb{N}$

Luego φ epiyectiva, inyectiva $\Rightarrow$ φ biyectiva ▨

P5] (i) Sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre el conjunto A. Decimos que ella es circular si satisface la propiedad siguiente:

$$(\forall x,y,z\in A)\; x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow z\mathcal{R}x \quad (*)$$

Probar que si $\mathcal{R}$ es refleja y circular entonces la relación es de equivalencia.

(ii) Considere la relación definida sobre $\mathbb{R}$ por

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2+y=y^2+x$$

(ii.1) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(ii.2) Determinar la clase de equivalencia de un real x cualquiera. (Control Recuperativo, 1996)

Solución:

(i) Pdq $\mathcal{R}$ relación de equivalencia.

$\mathcal{R}$ refleja: Es dato ✓

$\mathcal{R}$ simétrica: Como $(*)$ se cumple $\forall x,y,z$ tomemos en particular $y=z$

$$\Rightarrow \big[\underbrace{x\mathcal{R}y \wedge \underbrace{y\mathcal{R}y}_{V \text{ pues } \mathcal{R} \text{ refleja}}}_{x\mathcal{R}y} \Rightarrow y\mathcal{R}x\big]$$

Luego $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

$\mathcal{R}$ transitiva: Como $\mathcal{R}$ simétrica,

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow z\mathcal{R}x \Rightarrow x\mathcal{R}z \,//$$

(ii) Pdq $\mathcal{R}$ de equivalencia.

(ii.1) $\mathcal{R}$ refleja: En efecto $x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x^2+x=x^2+x \Leftrightarrow V$

$\mathcal{R}$ simétrica:
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2+y=y^2+x \Leftrightarrow y^2+x=x^2+y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$$

$\mathcal{R}$ transitiva: $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$

$$\Leftrightarrow x^2+y=y^2+x \wedge y^2+z=z^2+y$$
$$\Rightarrow (x^2+\cancel{y})+(\cancel{y^2}+z)=(\cancel{y^2}+x)+(z^2+\cancel{y})$$
$$\Leftrightarrow x^2+z=z^2+x \Leftrightarrow x\mathcal{R}z$$

(ii.2)
$$[x]_R=\{y\in\mathbb{R} \,/\, x\mathcal{R}y\}$$
$$=\{y\in\mathbb{R} \,/\, x^2+y=y^2+x\}=\{y\in\mathbb{R} \,/\, y=x \vee y=1-x\}$$

Pero $x^2+y=y^2+x$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2-(x-y)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)-(x-y)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow x=y \vee x+y=1$$

P6] Sea el conjunto $\mathbb{N}^m = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}$ de m-tuplas con componentes en los naturales. Se define $\forall X, Y \in \mathbb{N}^m$

$$X R_1 Y \iff x_1 \leq y_1,\ x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{m} x_i \leq \sum_{i=1}^{m} y_i$$

donde $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $\quad x_i \in \mathbb{N} \quad \forall i = 1, \ldots, m$

e $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ $\quad y_i \in \mathbb{N} \quad \forall i = 1, \ldots, m$

(i) Demuestre que R_1 es un orden parcial.

(ii) Sea R_2 la relación de orden usual entre m-tuplas

$\forall X, Y \in \mathbb{N}^m$, $X R_2 Y \iff x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$

Demuestre que $X R_2 Y \Rightarrow X R_1 Y$. Verifique que la implicación en el otro sentido es falsa (de un contraejemplo)

(Control 1, 1990)

Solución:

(i) Notemos que

$$X R_1 Y \iff (\forall k = 1, \ldots, m) \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i$$

Probemos que R_1 es de orden:

R_1 refleja: $X R_1 X \iff (\forall k = 1, \ldots, m) \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} x_i \iff V$

R_1 antisimétrica: $X R_1 Y \wedge Y R_1 X$

$$\iff (\forall k = 1, \ldots, m) \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i$$

$$\wedge\ (\forall k = 1, \ldots, m) \sum_{i=1}^{k} y_i \leq \sum_{i=1}^{k} x_i$$

$$\Rightarrow (\forall k = 1, \ldots, m) \sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} y_i$$

o sea $k = 1 \leadsto x_1 = y_1$

$k = 2 \leadsto x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow x_2 = y_2$ (pues $x_1 = y_1$)

$k = 3 \leadsto x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 \Rightarrow x_3 = y_3$ (pues $x_1 = y_1$ y $x_2 = y_2$)

$\vdots$

$k = m-1 \leadsto x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} = y_1 + \ldots + y_{m-1} \Rightarrow x_{m-1} = y_{m-1}$ (pues $x_i = y_i$ $\forall i = 1, \ldots, m-2$)

$k = m \leadsto x_1 + \ldots + x_m = y_1 + \ldots + y_m \Rightarrow x_m = y_m$ (pues $x_1 = y_1$, $\ldots$, $x_{m-1} = y_{m-1}$)

Luego $x_i = y_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$

$\therefore X = Y$

$\mathcal{R}_1$ transitiva: $X\mathcal{R}_1 Y \wedge Y\mathcal{R}_1 Z$

$$\Leftrightarrow (\forall i=1,\dots,m)\ \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i$$
$$\wedge\ (\forall i=1,\dots,m)\ \sum_{i=1}^{k} y_i \leq \sum_{i=1}^{k} z_i$$
$$\Rightarrow (\forall i=1,\dots,m)\ \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} z_i \Leftrightarrow X\mathcal{R}_1 Z \quad \blacksquare$$

(ii) Notamos que $X\mathcal{R}_2 Y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, \dots, x_k \leq y_k, \dots, x_m \leq y_m$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i \quad \forall k=1,\dots,m$$

Pues $a \leq b$ y $c \leq d$ $\therefore a+c \leq b+d$

$$\Leftrightarrow X\mathcal{R}_1 Y$$

La implicancia en el otro sentido es claramente falsa.
Tomando $m=2$ y $X=(1,2)$ e $Y=(2,1)$
Notamos que: $X\mathcal{R}_1 Y \Leftrightarrow (1,2)\mathcal{R}_1(2,1)$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2 \wedge 1+2 \leq 2+1 \Leftrightarrow V$$

pero $X\mathcal{R}_2 Y \Leftrightarrow (1,2)\mathcal{R}_2(2,1)$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2 \wedge 2 \leq 1 \Leftrightarrow F.$$

O sea $X\mathcal{R}_1 Y \not\Rightarrow X\mathcal{R}_2 Y$ en general. $\blacksquare$

P7 (i) Probar por inducción que para $m \geq 1$

$$2\cdot 7^m + 3\cdot 5^m - 5$$

es divisible por 24 (Control 2, 1999)

(ii) Sea a un entero impar
Probar que $\forall m \geq 1$, $2^{m+2} \mid a^{2^m}-1$. (2^{m+2} divide a $a^{2^m}-1$)

Solución:

(i) Para $m=1$ $\quad 2\cdot 7^1 + 3\cdot 5^1 - 5 = 24$ que es divisible por 24 ✓
Si suponemos para algún $m \in \mathbb{N}$ que $2\cdot 7^m + 3\cdot 5^m - 5$ es divisible por 24, o sea $2\cdot 7^m + 3\cdot 5^m - 5 = 24k$ $(k \in \mathbb{Z})$, probaremos que $2\cdot 7^{m+1} + 3\cdot 5^{m+1} - 5$ también es divisible por 24.

En efecto:
$$2\cdot 7^{m+1} + 3\cdot 5^{m+1} - 5 = 2\cdot 7\cdot 7^m + 3\cdot 5\cdot 5^m - 5$$
$$= 14\cdot 7^m + 15\cdot 5^m - 5$$
$$= 12\cdot 7^m + 12\cdot 5^m + 2\cdot 7^m + 3\cdot 5^m - 5$$
$$= \underbrace{\underbrace{12\,\underbrace{(7^m + 5^m)}_{\substack{\text{divisible}\\ \text{por 2 (es suma}\\ \text{de dos impares)}}}}_{\text{divisible por 24}} + \underbrace{24k}_{\substack{\text{divisible}\\ \text{por 24}}}}_{\text{divisible por 24}}$$

Hipótesis de Inducción. $\blacksquare$

(ii) Para $m=1$ $\quad 8 \mid a^2-1$ para a impar

Pero a impar $\Rightarrow a = 2k+1 \Rightarrow a^2-1 = (2k+1)^2-1 = 4k^2+4k$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

o sea $a^2-1 = 4k(k+1)$, pero $k(k+1)$ es divisible por 2 pues k ó $(k+1)$ es par. Luego $a^2-1 = \underbrace{4\underbrace{k(k+1)}_{\text{divisible por } 2}}_{\text{divisible por } 8}$.

Asumamos para algún n que:
$$2^{n+2} \mid a^{2^n}-1 \quad \text{y probemos que } 2^{(n+1)+2} \mid a^{2^{(n+1)}}-1$$
o sea que $a^{2^{n+1}}-1$ es divisible por 2^{n+3}.

En efecto:
$$\underbrace{a^{2^{n+1}}-1 = \underbrace{(a^{2^n}-1)}_{\substack{\text{div. por} \\ 2^{n+2}}}\underbrace{(a^{2^n}+1)}_{\substack{\text{div. por } 2 \\ \text{pues } a^{2^n} \\ \text{y } 1 \text{ son} \\ \text{impares}}}}_{\text{divisible por } 2^{n+2}\cdot 2 = 2^{n+3}}$$
Hipótesis $\longrightarrow$ (a es impar) ▨

P8 Sean α, β las raíces o soluciones de la ecuación
$$x^2-2x-4=0$$
Probar que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \alpha^n+\beta^n \in \mathbb{N}$. (Control 1, 1989)

Solución:

Para $n=0$, $\alpha^0+\beta^0 = 2 \in \mathbb{N}$

Para $n=1$, $\alpha^1+\beta^1 = \alpha+\beta = 2 \in \mathbb{N}$

Nota: $\alpha+\beta = 2$, $\alpha\beta = -4$. Recordar propiedades de las ecs. de 2do grado.

Supongámoslo válido para algún $k=0,1,2,\dots,n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1$. Probemos entonces la afirmación para $n+1$.

Notemos que
$$\underbrace{(\alpha+\beta)}_{2}(\alpha^n+\beta^n) = \alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\beta\alpha^n+\beta^{n+1}$$
$$= (\alpha^{n+1}+\beta^{(n+1)}) + \underbrace{\alpha\beta}_{-4}(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$
$$\Rightarrow \alpha^{n+1}+\beta^{n+1} = 2\underbrace{(\alpha^n+\beta^n)}_{\in \mathbb{N}} + 4\underbrace{(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$$
Por hipótesis. ▨

Piensen por qué necesito probar la afirmación para $n=0$ y $n=1$ y no sólo para $n=0$ como siempre...

P9 Sea $u_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ para $n=0,1,2,\dots$

(a) Probar que $u_{n+1} = 6u_n - 4u_{n-1}$

(b) Probar que $(\forall n \geq 0)$ u_n es un entero positivo.

(c) Probar que $(\forall n \geq 0)$ $2^n \mid u_n$

Concluir que $2^n \mid \lceil (3+\sqrt{5})^n \rceil$

Nota: $\lceil x \rceil$ es el menor entero p tal que $x \leq p$.

Ejemplo $\lceil 2{,}5 \rceil = 3$ $\quad \lceil -0{,}1 \rceil = 0$ $\quad \lceil -3 \rceil = -3$

Solución:

(a) $$\begin{aligned}6u_m-4u_{m-1} &= 6(3+\sqrt5)^m+6(3-\sqrt5)^m\\ &\quad -4(3+\sqrt5)^{m-1}-4(3-\sqrt5)^{m-1}\\ &=(3+\sqrt5)^{m-1}[\underbrace{6(3+\sqrt5)-4}_{\substack{14+6\sqrt5\\(3+\sqrt5)^2}}]+(3-\sqrt5)^{m-1}[\underbrace{6(3-\sqrt5)-4}_{\substack{14-6\sqrt5\\(3-\sqrt5)^2}}]\\ &=(3+\sqrt5)^{m+1}+(3-\sqrt5)^{m+1}=u_{m+1}\end{aligned}$$

(b) Que $u_m>0$ es claro pues $3+\sqrt5$ y $3-\sqrt5>0$
$\Rightarrow u_m=(3+\sqrt5)^m+(3-\sqrt5)^m>0$

Luego basta probar que es entero.

Para $m=0$, $u_0=(3+\sqrt5)^0+(3-\sqrt5)^0=1+1=2$ entero

Para $m=1$, $u_1=(3+\sqrt5)^1+(3-\sqrt5)^1=6$ entero.

Hipótesis de Inducción: $(\forall k\le m)$ u_k es entero.

Pdq u_{m+1} es entero. En efecto

$$u_{m+1}=\underbrace{6u_m-4u_{m-1}}_{\text{Enteros}}\rightarrow \text{entero} \quad // \quad \blacksquare$$

Reflexionar por que nuevamente debo probarlo para $m=0$ y $m=1$.

(c) Para $m=0$, $2^0 | u_0$ pues $1|2$ ✓

Para $m=1$, $2^1|u_1$ pues $2|6$ ✓

Hipótesis de Inducción: $(\forall k\le m)$ $2^k|u_k$

Pdq $2^{m+1}|u_{m+1}$. En efecto $u_{m+1}=\underbrace{6u_m}_{\text{divisible por } 2^m}-4\underbrace{u_{m-1}}_{\text{divisible por } 2^{m-1}}$

Para algunos $l_1,l_2\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}&=3\cdot2\cdot2^m l_1-2^2\cdot2^{m-1}l_2\\&=\underbrace{2^{m+1}(3l_1-l_2)}_{\text{divisible por } 2^{m+1}} \quad //\end{aligned}$$

Notemos que $0<3-\sqrt5<1\Rightarrow 0<(3-\sqrt5)^m<1$

y $u_m=(3+\sqrt5)^m+\underbrace{(3-\sqrt5)^m}_{\in(0,1)}$ es entero (Por (b))

Luego $u_m=\lceil(3+\sqrt5)^m\rceil$ (Porque ?)

y por (c) $2^m | u_m=\lceil(3+\sqrt5)^m\rceil$ $\blacksquare$

P10 Sea $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ la secuencia definida por:

$$f_0=1,\ f_1=2 \ \text{y} \ f_{m+2}=2f_{m+1}+f_m \quad \forall m\ge0$$

Probar por inducción que:

$$(\forall m\ge0)\quad \frac{f_{m+1}}{f_m}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots\, 2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$$

donde el "2" aparece $(m+1)$ veces.

(Control Recuperativo)

...ición:

a $m=0$ $\quad \frac{f_1}{f_0} = 2$ y el "2" aparece $\underbrace{(0+1)}_{1}$ veces //

Supongamos la afirmación válida para algún m y probemosla para $m+1$. En efecto

$$\frac{f_{(m+1)+1}}{f_{(m+1)}} = \frac{f_{m+2}}{f_{m+1}} = \frac{2f_{m+1}+f_m}{f_{m+1}} = 2+\frac{f_m}{f_{m+1}} = 2+\cfrac{1}{\cfrac{f_{m+1}}{f_m}}$$

$$= \underbrace{2+\cfrac{1}{\underbrace{2+\cfrac{1}{2+\cdots \cfrac{}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}_{(m+1)\text{ "dos"}}}}_{(m+2)\text{ "dos" } ((m+1)+1)}$$

Por hipótesis.

P11 Se define $a_m = 2^{2^m}+1$, $m=0,1,2,\ldots$

Se probará que m.c.d. $(a_n, a_m) = 1$ si $n \neq m$

Para probarlo haremos lo siguiente:

(a) Muestre por inducción que:

$$(a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_{m-1}) + 2 = a_m \quad \text{para } m=1,2,\ldots$$

(b) Pruebe que si $\exists\, p>1$ tal que $p|a_n$ y $p|a_m$ para $n\neq m$ entonces p es par e impar a la vez. Concluya el resultado, es decir $\underbrace{\text{m.c.d.}}_{\text{máximo común divisor}}(a_n, a_m) = 1$ para $n \neq m$.

(Control 2, 1993)

Solución:

(a) Para $m=1$, $\quad a_0+2 = (2^{2^0}+1)+2 = 5 = 2^{2^1}+1 = a_1$

Supongamos la afirmación válida para algún m, o sea

$$a_0 a_1 \cdots a_{m-1} + 2 = a_m$$

y probemosla para $m+1$, es decir

$$a_0 a_1 \cdots a_{m-1} a_m + 2 = a_{m+1}$$

En efecto:

$$\underbrace{a_0 a_1 \cdots a_{m-1}}_{a_m - 2 \leftarrow \text{ Por hipótesis de inducción}} a_m + 2 = (a_m-2)a_m + 2$$

$$= (2^{2^m}-1)(2^{2^m}+1)+2$$

$$= (2^{2^m})^2 - 1 + 2$$

$$= 2^{2^m \cdot 2} + 1$$

$$= 2^{2^{m+1}} + 1 = a_{m+1}$$

(b) Supongamos $m > n$ (sin pérdida de generalidad)

Luego: $a_0 a_1 \cdots a_n \cdots a_{m-1} + 2 = a_m$ (Por (a))

Si $p|a_n \Rightarrow p|a_0 \cdots a_n \cdots a_{m-1}$ y como $p|a_m$

$$\Rightarrow p|a_m - (a_0 \cdots a_n \cdots a_{m-1}) = 2 \Rightarrow p|2 \text{ y } p>1 \Rightarrow p=2$$

Luego p es par. Pero $p \mid a_m - 2^{2^m} + 1$ o sea p divide a un número impar $\Rightarrow p$ impar. Luego p es par e impar a la vez y esto es una contradicción. Luego $p = 1$, o sea el mayor divisor común que tienen a_n y a_m (con $n \neq m$) es 1. (Si alguien los divide a ambos, debe ser el 1.). En otras palabras:

$$m.c.d.(a_n, a_m) = 1. \blacksquare$$

P12) Considere el conjunto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en A por:

$$(a_1,a_2)\mathcal{R}(b_1,b_2) \Leftrightarrow a_1+a_2-b_1-b_2 = 2k \text{ para un cierto } k \in \mathbb{Z}.$$

(i) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
(ii) Calcular explícitamente $[(0,0)]_R$ y $[(1,0)]_R$
(iii) Pruebe que $A = [(0,0)]_R \cup [(1,0)]_R$
(iv) Pruebe que existe una biyección $f : [(1,0)]_R \to [(0,0)]_R$

(Control 2, 1999)

Solución:

(i) $\mathcal{R}$ refleja: $(a_1,a_2)\mathcal{R}(a_1,a_2) \Leftrightarrow \underbrace{a_1+a_2-a_1-a_2}_{0} = 2\cdot k$ para un cierto $k \in \mathbb{Z}$

En este caso $k = 0$.

$\mathcal{R}$ simétrica: $(a_1,a_2)\mathcal{R}(b_1,b_2) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})$

$$a_1+a_2-b_1-b_2 = 2k \quad / \cdot -1$$
$$\Rightarrow (\exists \tilde{k} = -k)$$
$$b_1+b_2-a_1-a_2 = \underbrace{2\tilde{k}}_{-2k}$$
$$\Leftrightarrow (b_1,b_2)\mathcal{R}(a_1,a_2)$$

$\mathcal{R}$ transitiva: $(a_1,a_2)\mathcal{R}(b_1,b_2) \wedge (b_1,b_2)\mathcal{R}(c_1,c_2)$

$$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow (\exists k_1 \in \mathbb{Z})\ a_1+a_2-b_1-b_2 = 2k_1 \\ \wedge\ (\exists k_2 \in \mathbb{Z})\ b_1+b_2-c_1-c_2 = 2k_2\end{array}\right\} \text{sumamos}$$
$$\Rightarrow (\exists k = k_1+k_2 \in \mathbb{Z})\ a_1+a_2-c_1-c_2 = 2(k_1+k_2) = 2k.$$
$$\Leftrightarrow (a_1,a_2)\mathcal{R}(c_1,c_2) \blacksquare$$

(ii)
$$[(0,0)]_R = \{(a_1,a_2) \in A \mid (a_1,a_2)\mathcal{R}(0,0)\}$$
$$= \{(a_1,a_2) \in A \mid (\exists k \in \mathbb{Z})\ a_1+a_2-0-0 = 2k\}$$
$$= \{(a_1,a_2) \in A \mid (\exists k \in \mathbb{Z})\ a_1+a_2 = 2k\}$$

Pero para que la suma de dos enteros sea par es necesario que ambos sean pares o que ambos sean impares.

Luego
$$[(0,0)]_R = \{(2k_1, 2k_2) \in A \mid k_1,k_2 \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k_1+1, 2k_2+1) \in A \mid k_1,k_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Ahora $[(1,0)]_R = \{(a_1,a_2)\in A \mid (a_1,a_2) R (1,0)\}$
$= \{(a_1,a_2)\in A \mid (\exists k\in \mathbb{Z})\ a_1+a_2-1-0 = 2k\}$
$= \{(a_1,a_2)\in A \mid (\exists k\in \mathbb{Z})\ a_1+a_2 = 2k+1\}$

Pero para que la suma de dos enteros sea impar uno de ellos debe ser par y el otro impar.

Luego $[(1,0)]_R = \{(2k_1, 2k_2+1)\in A \mid k_1,k_2\in \mathbb{Z}\}$
$\cup \{(2k_1+1, 2k_2)\in A \mid k_1,k_2\in \mathbb{Z}\}$ ▨

(iii) Claramente $[(0,0)]_R \cup [(1,0)]_R \subseteq A$

Probemos que $A \subseteq [(0,0)]_R \cup [(1,0)]_R$

Si $(a_1,a_2)\in A$ hay dos opciones para a_1 y a_2.

① Ambos con la misma paridad.
En este caso $(a_1,a_2)\in [(0,0)]_R \subseteq [(0,0)]_R \cup [(1,0)]_R$

② Ambos con distinta paridad
Aquí $(a_1,a_2)\in [(1,0)]_R \subseteq [(0,0)]_R \cup [(1,0)]_R$

Luego $A \subseteq [(0,0)]_R \cup [(1,0)]_R$ ▨

(iv) Sea $f : [(1,0)]_R \to [(0,0)]_R$ definida por
$$f(\underbrace{a_1,a_2}_{\text{distinta paridad}}) = (\underbrace{a_1-1, a_2}_{\text{Los dejo con la misma paridad}}) \in [(0,0)]_R$$

Ejercicio: Pruebe que es biyectiva.
Nota: También sirve: $f(a_1,a_2) = (a_1, a_2+7)$ ▨.

P13 Para $a, b\in \mathbb{R}, a\neq 0$ se construye la función $f_{a,b} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que a x le asocia $f_{a,b}(x) = ax+b$. Considere el conjunto de todas estas funciones $G = \{f_{a,b} : a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0\}$

(a) Pruebe que:

(a.1) La identidad de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $id_{\mathbb{R}}$, pertenece a G.

(a.2) Sea $f_{a,b}\in G$, pruebe que $f_{a,b}$ es biyección y $f_{a,b}^{-1}\in G$.

(a.3) Pruebe que si $f_{a,b}\in G$, $f_{a',b'}\in G$, entonces $f_{a,b}\circ f_{a',b'}\in G$

(b) Sobre el conjunto de las biyecciones de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $S = \{f : \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ biyección}\}$ considere la relación R siguiente: Para $f,g\in S$ se tiene $fRg \Leftrightarrow g^{-1}\circ f\in G$.
Pruebe que R es una relación de equivalencia en S.

(Control 2, 1993)

Solución:

a) (a.1) $id_{\mathbb{R}}(x) = x = 1\cdot x + 0 = \underbrace{f_{1,0}}_{f_{a,b}}$ con $a = 1 \neq 0$ y $b = 0$

$\therefore id_{\mathbb{R}} \in G$ ▨

(a.2) $f_{a,b}(x) = ax+b$. Probemos que $f_{a,b}$ es biyectiva.

① $f_{a,b}$ inyectiva:

$$f_{a,b}(x_1)=f_{a,b}(x_2) \Leftrightarrow ax_1+b = ax_2+b$$
$$\Rightarrow ax_1 = ax_2 \;/\cdot \tfrac{1}{a} \quad (a\neq 0)$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

② $f_{a,b}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sobreyectiva.

Pdq $(\forall y\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R})\ \underbrace{f_{a,b}(x)}_{ax+b}=y$

$$ax+b=y \Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \quad (a\neq 0)$$

Dado $y\in\mathbb{R}$, $\exists x=\frac{y-b}{a}\in\mathbb{R}$ tal que

$$f_{a,b}(x) = f_{a,b}\left(\frac{y-b}{a}\right) = a\left(\frac{y-b}{a}\right)+b = y$$

Calculemos $f_{a,b}^{-1}$: $\underbrace{f_{a,b}(x)}_{y} = ax+b$

$$\Rightarrow \frac{y-b}{a} = x \rightsquigarrow y=\frac{x-b}{a}=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow f_{a,b}^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a} = f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}} \text{ donde } \frac{1}{a}\neq 0$$

Luego $f_{a,b}^{-1}\in G$ ▨

(a.3) $(f_{a,b}\circ f_{a',b'})(x) = f_{a,b}(f_{a',b'}(x)) = f_{a,b}(a'x+b')$
$$= a(a'x+b')+b$$
$$= aa'x + ab'+b.$$

Luego $\underbrace{f_{a,b}}_{a\neq 0}\circ\underbrace{f_{a',b'}}_{a'\neq 0} = \underbrace{f_{aa',ab'+b}}_{\Rightarrow aa'\neq 0}\in G$ ▨

(b) $\mathcal{R}$ refleja: $f\mathcal{R}f \Leftrightarrow f^{-1}\circ f\in G \Leftrightarrow id_{\mathbb{R}}\in G \Leftrightarrow V$

por (a.1)

$\mathcal{R}$ simétrica: $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow g^{-1}\circ f\in G \Rightarrow (g^{-1}\circ f)^{-1}\in G$

por (a.2)

$$\Leftrightarrow (f^{-1}\circ g)\in G$$

f y g biyectivas

$$\Leftrightarrow g\mathcal{R}f$$

$\mathcal{R}$ transitiva: $f\mathcal{R}g \wedge g\mathcal{R}h \Leftrightarrow g^{-1}\circ f\in G \wedge h^{-1}\circ g\in G$

Por (a.3)

$$\Rightarrow (h^{-1}\circ g)\circ(g^{-1}\circ f)\in G$$
$$\Leftrightarrow h^{-1}\circ f\in G$$
$$\Leftrightarrow f\mathcal{R}h$$ ▨

P14 Para $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, defina $k=2^m$. Queremos probar que todo subconjunto $Y \subseteq \mathbb{N}$ de $2k-1$ elementos posee un subconjunto $X \subseteq Y$ de k elementos cuya suma es divisible por k.

(i) Para $m=1$ y $k=2$ pruebe que de todo subconjunto de 3 elementos de $\mathbb{N}$ se pueden extraer 2 números cuya suma es divisible por 2.

(ii) Probar la propiedad para m cualquiera.

(Control 1, 1991)

Solución:

(i) En un subconjunto de $\mathbb{N}$ con 3 elementos existen 2 que deben tener la misma paridad. Luego la suma de estos 2 elementos es par y por ende divisible por 2. ■

(ii) En (i) probamos la proposición para $m=1$.
Asumamos cierta la proposición para algún $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, o sea dado un cjto de $2k-1$ elementos le puedo extraer un subconjunto de k elementos con suma divisible por k. ($k=2^m$)

Pdq: Dado un cjto con $2\tilde{k}-1$ elementos puedo elegir $\tilde{k}$ de ellos tal que su suma sea divisible por $\tilde{k}$ ($\tilde{k}=2^{m+1} = 2\cdot 2^m = 2k$)

Replanteando el problema con $\tilde{k}=2k$ tenemos:
Dado un cjto de $4k-1$ elementos puedo elegir $2k$ de ellos tal que su suma sea divisible por $2k$.

Notamos que $4k-1=(2k-1)+(2k-1)+1$.
Luego el cjto de $4k-1$ elementos se puede separar como sigue:

$$\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}_{4k-1 \text{ elementos}} = \overbrace{\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}_{2k-1}}^{\text{Grupo 1}} \quad \overbrace{\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}_{2k-1}}^{\text{Grupo 2}} \quad \overbrace{\underbrace{\bullet}_{1 \text{ elemento.}}}^{\text{Grupo 3}}$$

G1 { Elijo k cuya suma S_1 es divisible por k — Elijo k cuya suma S_2 es divisible por k } G2

En el grupo 1 sobran $k-1$ elementos (después de elegir k de ellos).
En el grupo 2 sobran $k-1$ elementos
En el grupo 3 tenemos 1 elementos

Sumamos → $(2k-1)$ ← Tenemos un grupo sobrante de $2k-1$ elementos

G3 { Elijo k cuya suma S_3 es divisible por k } en el cjto de $4k-1$ elementos.

Notar que los elementos usados para elegir los k elementos de G1, G2 y G3 son distintos. (Son sacados de grupos distintos)

Suma de los elementos de $G_1 = S_1 = k\alpha_1 \quad \alpha_1 \in \mathbb{Z}$

$S_2 = k\alpha_2 \quad \alpha_2 \in \mathbb{Z}$

$S_3 = k\alpha_3 \quad \alpha_3 \in \mathbb{Z}$

S_1, S_2 y S_3 son divisibles por k

Notamos que entre α_1, α_2 y α_3 existen (por lo menos) dos con la misma paridad. Sean estos α_i y α_j $\quad i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$

Luego si unimos G_i con G_j obtenemos un grupo de $2k$ elementos cuya suma de elementos es igual a $\underbrace{\underbrace{k\alpha_i + k\alpha_j}_{k(\alpha_i+\alpha_j)}}_{\text{div. por } 2k}$

$k(\alpha_i+\alpha_j)$ div. por 2 pues α_i y α_j tienen la misma paridad.

div. por $2k$

$G_i \cup G_j$ es el grupo de $2k$ elementos buscado (o sea, aquel en que la suma de sus elementos sea divisible por $2k$)

$G_i \cap G_j = \phi$ (Porque?)

Por esto que $G_i \cup G_j$ tiene $2k$ elementos y no menos.

P15 Pruebe por inducción que $(\forall m \geq 1)\ m \in \mathbb{N}$ se cumple que:
$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{m}(m-i+1)a_i$$

Concluir que si $H_k = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}$, entonces $\sum_{i=1}^{m} H_k = (m+1)H_m - m$ sin usar inducción

(Control Recuperativo)

Solución:

Hagamos inducción sobre m.

Para $m=1$, $\sum_{k=1}^{1}\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$ y $\sum_{i=1}^{1}(1-i+1)a_i = a_1$ //

Supongamos la afirmación valida para algún m y probemos la afirmación para $m+1$, o sea:
$$\sum_{k=1}^{m+1}\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{m+1} \underbrace{(m+1-i+1)}_{m+2-i} a_i$$

En efecto, $$\sum_{k=1}^{m+1}\sum_{i=1}^{k} a_i = \underbrace{\boxed{\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)}} + \sum_{i=1}^{m+1} a_i$$

pues $\sum_{k=1}^{m+1} b_k = \left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right) + b_{m+1}$

$$= \sum_{i=1}^{m}(m-i+1)a_i + \sum_{i=1}^{m+1} a_i$$

sume y reste el termino con $k=m+1$ en la sumator a.

OJO $$= \left(\sum_{i=1}^{m+1}(m-i+1)a_i\right) - \underbrace{(m-(m+1)+1)}_{0}a_{m+1} + \sum_{i=1}^{m+1} a_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1}\left[(m-i+1)a_i + a_i\right] = \sum_{i=1}^{m+1}(m+2-i)$$

Tomando $a_i = \frac{1}{i}$, tenemos:
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}}_{H_k} = \sum_{i=1}^{m}(m-i+1)\cdot\frac{1}{i}$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\left[(m+1)\cdot\frac{1}{i} - 1\right]$$
$$= (m+1)\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{m}1$$
$$= (m+1)H_m - m. \blacksquare$$

P16| Sea Q una relación en $\mathbb{R}$. Se define el conjunto:
$$A = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;/\; f \text{ es función} \}$$
Además definimos la relación $\mathcal{R}$ en A por:
$$f\mathcal{R}g \iff (\exists m \geq 0)(\forall k \in \{0,1,\dots,m\})\; f(k)Qg(k).$$
(a) Probar que $f\mathcal{R}g \iff f(0)Qg(0)$

(b) Probar que si $\mathcal{R}$ es una relación de orden entonces Q es una relación de orden.

(c) Probar que si Q es una relación de equivalencia entonces $\mathcal{R}$ es también una relación de equivalencia. Además pruebe que la función $\varphi : A/\mathcal{R} \to \mathbb{R}/Q$ que asocia a cada clase de equivalencia $[f]_{\mathcal{R}}$ la clase de $f(0)$ con respecto a Q, es decir, $\varphi([f]_{\mathcal{R}}) = [f(0)]_Q$ es una inyección.

(Control 2, 1997)

Solución:

(a) ($\Rightarrow$) Como $f\mathcal{R}g \Rightarrow (\exists m \geq 0)\; f(0)Qg(0) \wedge f(1)Qg(1) \wedge f(2)Qg(2) \wedge \dots \wedge f(m)Qg(m)$.

en particular $\Rightarrow f(0)Qg(0)$

($\Leftarrow$) Como $f(0)Qg(0)$ tenemos que $(\exists m=0 \geq 0)\; f(0)Qg(0)$
$$\iff f\mathcal{R}g \blacksquare$$

(b) Como $\mathcal{R}$ es de orden, $\forall f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $f\mathcal{R}f \iff f(0)Qg(0)$ ← Por (a)
(en particular refleja)

Tomando $f(m) = a$ (f constante)

Entonces $f(0)Qg(0) \iff aQa$ $(\forall a \in \mathbb{R})$
← Para cada a tomamos la función constante correspondiente

$\therefore Q$ es refleja

Para Q antisimétrica y transitiva tomaremos $f(m) = a$ $g(m) = b$ y $h(m) = c$ funciones constantes.

Ahora $\underbrace{f\mathcal{R}g}_{f(0)Qg(0)} \wedge \underbrace{g\mathcal{R}f}_{g(0)Qf(0)} \Rightarrow \underbrace{f=g}_{f(n)=g(n)\ \forall n\in\mathbb{N}}$ (Pues $\mathcal{R}$ antisimétrica)

$aQb \wedge bQa \Rightarrow a=b$ $\therefore$ Q antisimétrica.

y $\underbrace{f\mathcal{R}g}_{f(0)Qg(0)} \wedge \underbrace{g\mathcal{R}h}_{g(0)Qh(0)} \Rightarrow \underbrace{f\mathcal{R}h}_{f(0)Qh(0)}$ (Pues $\mathcal{R}$ transitiva)

$aQb \wedge bQc \Rightarrow aQc$ $\therefore$ Q transitiva. ▨

(c) Pdq $\mathcal{R}$ es de equivalencia

$\mathcal{R}$ refleja: $f\mathcal{R}f \Leftrightarrow f(0)Qf(0) \Leftrightarrow V$ pues Q refleja.

$\mathcal{R}$ simétrica: $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f(0)Qg(0) \Rightarrow g(0)Qf(0)$ (pues Q es simétrica) $\Leftrightarrow g\mathcal{R}f$

$\mathcal{R}$ transitiva: $f\mathcal{R}g \wedge g\mathcal{R}h \Leftrightarrow f(0)Qg(0) \wedge g(0)Qh(0)$,
$\Rightarrow f(0)Qh(0)$ (pues Q es transitiva) $\Leftrightarrow f\mathcal{R}h$

Demostremos ahora que $\varphi: A/\mathcal{R} \to \mathbb{R}/Q$ está bien definida y es inyectiva (al mismo tiempo)

Pdq
$\varphi([f]_R) = \varphi([g]_R) \Leftrightarrow [f]_R = [g]_R$

En efecto $\varphi([f]_R) = \varphi([g]_R) \Leftrightarrow [f(0)]_Q = [g(0)]_Q$
$\Leftrightarrow f(0)Qg(0)$
$\Leftrightarrow f\mathcal{R}g \Leftrightarrow [f]_R = [g]_R$ ▨

P17) Sean E un conjunto no vacío y $<<$ una relación de orden total sobre E. Probar que si A es un subconjunto finito no vacío de E entonces existe $a\in A$ tal que para cada $b\in A$, $a<<b$.

Indicación: Pruébelo por inducción sobre el número de elementos de A. (Control 2, 1997)

Solución:

Sea $|A|$ = número de elementos de A y $n=|A|$. Vamos a hacer inducción sobre n

Para $n=1$, vamos a probar que para cualquier conjunto de 1 elemento existe $a\in A$ tal que para cada $b\in A$, $a<<b$

Sea $A=\{c\}$. Luego existe $a=c\in A$ tal que para cada $b\in A$ (b necesariamente es c) $a<<b$ o sea $\underbrace{c<<c}_{\text{cierto pues } << \text{ es refleja.}}$

Supongamos ahora que para cualquier conjunto A de n elementos existe $a\in A$ tal que para cada $b\in A$, $a<<b$

Probemos entonces que para cualquier conjunto de $n+1$ elementos (sea este B) existe $a\in B$ tal que para cada $b\in B$, $a<<b$

En efecto: si B tiene $m+1$ elementos $\Rightarrow B = A \cup \{x\}$ donde A es algún conjunto de m elementos y $x \in B$.
Luego en A (de m elementos) existe $a \in A$ tal que para cada $b \in A$, $a << b$ (*). Ahora si $a << x$ tendríamos $a \in B$ tal que $(\forall c \in B)\ a << c$. En caso contrario (como R es de orden "total") no queda otra que $x << a$. Pero como

$$\forall b \in A,\ a << b \Rightarrow (\forall b \in A)\ x << a \wedge a << b$$

$$\underset{\text{pues } << \text{ es transitiva}}{\Rightarrow} (\forall b \in A)\ x << b$$

Probemos que $(\forall b \in B)\ x << b$ $B = A \cup \{x\}$ Pues $<<$ es refleja.
En efecto si $b \in B \Rightarrow b \in A \vee b = x$
y $(\forall b \in A)\ x << b$ y si $b = x$, $x << \underbrace{b}_{x}$

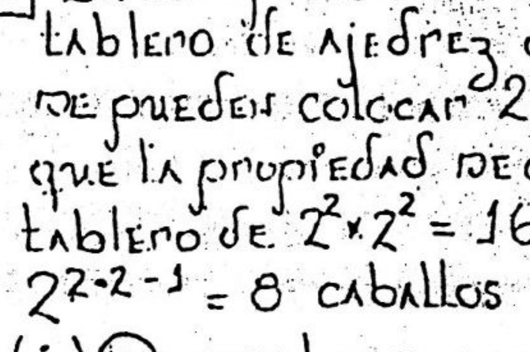
[(*) Por hipótesis de inducción.]

En resumen, si $a << x$, existe $a \in B$ (el mismo $a \in A$ que encontramos por hipótesis de inducción) tal que $(\forall b \in B)\ a << b$
En caso contrario, $x << a$ y tenemos que existe "x" $\in B$ tal que $(\forall b \in B)\ x << b$

En vez de elegir a a, escojo a x pues $x << a$. ∎

18] En este problema se demostrará por inducción que en un tablero de ajedrez de $2^m \times 2^m$ casilleros, con $m \geq 2$, a lo más se pueden colocar 2^{2m-1} caballos sin que se coman. Suponga que la propiedad se cumple para $m = 2$, es decir que en un tablero de $2^2 \times 2^2 = 16$ casilleros se pueden colocar a lo más $2^{2\cdot 2-1} = 8$ caballos sin que se coman. (no lo demuestre)
(i) Demuestre que si la propiedad es cierta para $m=2$ también lo es para $m=3$. Para esto razone por contradicción dividiendo el tablero de $2^3 \times 2^3$ casilleros en 4 tableros iguales y pruebe que si se pueden colocar más de $2^{2\cdot 3-1} = 32$ caballos en el tablero completo, entonces uno de los 4 tableros pequeños quedaría con más de 8 caballos.
(ii) Demuestre que si la propiedad es válida para m cualquiera con $m \geq 2$, también lo es para $m+1$. (Control 2, 1994)

Solución:
(i)



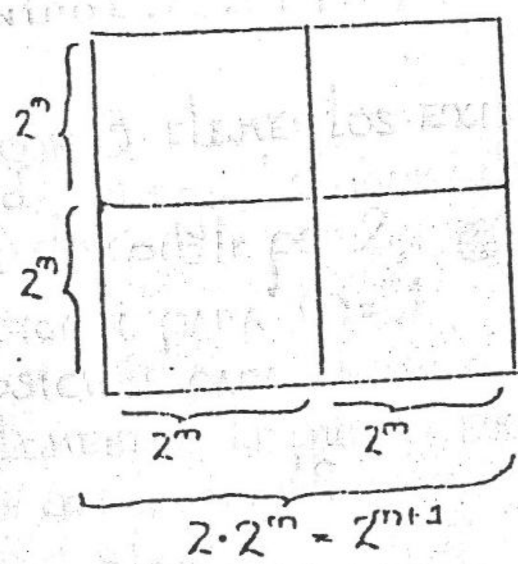
donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son la cantidad de caballos que hay en cada cuadrado de $2^2 \times 2^2$. Supongamos que hay más de 32 caballos en total, o sea

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 > 32$$

Si $c_1 \leq 8$, $c_2 \leq 8$, $c_3 \leq 8$ y $c_4 \leq 8$
$\Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \leq 32$ $(\rightarrow\leftarrow)$

Luego alguno de ellos (C_1, C_2, C_3 o C_4) es mayor estricto que 8, por ende en uno de los cuadrados de $2^2 \times 2^2$ hay mas de 8 caballos que no se comen, lo cual es una contradicción a lo que el problema dice que asumimos. ▨

(ii) Pdq en un tablero de lado $2^{m+1} = 2\cdot 2^m$ se pueden colocar a lo mas $2^{2(m+1)-1} = 2^{2m+1} = 2^2 \cdot 2^{2m-1} = 4\cdot 2^{2m-1}$



Analogamente a lo hecho en (i), si pudieramos colocar mas de $2^{2(m+1)-1} = 4\cdot 2^{2m-1}$ por lo menos en 1 de los cuadrados mas pequeños tendremos mas de $\underbrace{\frac{1}{4}\left(2^{2(m+1)-1}\right)}_{\underbrace{\frac{1}{4}\left(4\cdot 2^{2m-1}\right)}_{2^{2m-1}}}$ caballos sin que se coman, lo cual contradice que la propiedad era válida para m ▨

P19 Sobre el conjunto de las proposiciones se define la relación $\mathcal{R}$ por:

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow ((p\wedge q)\Leftrightarrow q).$$ Además para $p,q \in \mathcal{P}$ (conjunto de las proposiciones) se dice que $p = q$ ssi $p \Leftrightarrow q$

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de orden sobre $\mathcal{P}$.

(b) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de orden total.

(Control 1, 2001)

Solución:

(a) Notemos que
$$[(p\wedge q)\Leftrightarrow q] \Leftrightarrow \left[\overset{V}{[(p\wedge q)\Rightarrow q]} \wedge [q\Rightarrow (p\wedge q)]\right]$$
$$\Leftrightarrow [q\Rightarrow (p\wedge q)]$$
$$\Leftrightarrow [\sim q \vee (p\wedge q)]$$
$$\Leftrightarrow [\underbrace{(\sim q\vee p)}_{q\Rightarrow p} \wedge \underbrace{(\sim q \vee q)}_{V}] \Leftrightarrow [q\Rightarrow p]$$

Luego $p\mathcal{R}q \Leftrightarrow ((p\wedge q)\Rightarrow q)$
$\Leftrightarrow (q\Rightarrow p)$ ← Esta vamos a usar.

Probemos ahora que $\mathcal{R}$ es de orden

$\mathcal{R}$ refleja: $p\mathcal{R}p \Leftrightarrow (p\Rightarrow p) \Leftrightarrow V$ ✓

$\mathcal{R}$ antisimétrica: $p\mathcal{R}q \wedge q\mathcal{R}p \Leftrightarrow [(q\Rightarrow p)\wedge(p\Rightarrow q)]$
$\Leftrightarrow [p\Leftrightarrow q]$ ✓

$\mathcal{R}$ transitiva: $p\mathcal{R}q \wedge q\mathcal{R}r \Leftrightarrow [(q\Rightarrow p)\wedge(r\Rightarrow q)]$
$\Leftrightarrow [(r\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)]$
$\Rightarrow r\Rightarrow p$
$\Leftrightarrow p\mathcal{R}r$ ▨

(b) Dados p y $q \in \mathcal{P}$ debemos probar que $p\mathcal{R}q \vee q\mathcal{R}p$

En efecto: si $p\mathcal{R}q$ es verdadera estamos listos ✓

si $p\mathcal{R}q$ es falsa $\Rightarrow (q \Rightarrow p)$ es falsa

luego q es V y p es F.

$\Rightarrow (p \Rightarrow q)$ es V ← pues $F \Rightarrow V$ es verdadero.

$\Leftrightarrow q\mathcal{R}p$ ← O sea, si no funciona en un sentido funciona en el otro. ▨

P20 Probar que para todo natural $m \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{m+k} \leq \frac{5}{6}. \qquad \text{(Control 1, 1996)}$$

Solución:

Para $m=1$ la proposición es cierta pues

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6} \leq \frac{5}{6}$$

Supongamos que para algún $m \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{m+k} \leq \frac{5}{6}$.

Probemos la desigualdad para $m+1$.

$$\sum_{k=1}^{(m+1)+1} \frac{1}{(m+1)+k} \underset{\text{corrimiento de índice}}{=} \sum_{k=2}^{m+3} \frac{1}{(m+1)+(k-1)} = \sum_{k=2}^{m+3} \frac{1}{m+k}$$

$$= \sum_{k=2}^{m+1} \frac{1}{m+k} + \frac{1}{m+(m+2)} + \frac{1}{m+(m+3)}$$

suma y resto el término con $k=1$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{m+k} \underbrace{\underbrace{\underbrace{- \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2(m+1)}}_{\frac{-2+1}{2(m+1)}}}_{\frac{-1}{2(m+1)}} + \frac{1}{2m+3}}_{\frac{-(2m+3)+2(m+1)}{2(m+1)(2m+3)}}$$

Hipótesis de inducción

$$\leq \frac{5}{6} + \frac{-1}{2(m+1)(2m+3)} \leq \frac{5}{6} \quad ▨$$

P21. Sea $f: E \to F$ una función, y definamos la siguiente relación en E: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x)=f(y)$

(a) Probar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia

(b) Determine una biyección entre las clases de equivalencia que $\mathcal{R}$ induce sobre E y el recorrido de f.

Solución:

(a) Ejercicio para ustedes. Háganlo! ▨

(b) Consideremos $\varphi : E/R \to f(E)$ $\quad f(E) = $ Imagen de E a través de f $= $ Recorrido de f.
$\varphi([x]_R) = f(x) \in f(E)$

Veamos que φ está bien definida y es inyectiva.

Pdq : $\varphi([x_1]_R) = \varphi([x_2]_R) \Leftrightarrow [x_1]_R = [x_2]_R$

En efecto: $\varphi([x_1]_R) = \varphi([x_2]_R) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$
$$\Leftrightarrow x_1 R x_2$$
$$\Leftrightarrow [x_1]_R = [x_2]_R .$$

Veamos ahora que φ es epiyectiva.

Pdq : $(\forall y \in f(E))(\exists u \in E/R)\ \varphi(u) = y$

En efecto, como $y \in f(E)$, $\exists x \in E$, $f(x) = y$

Tomando $u = [x]_R \Rightarrow \varphi(u) = \varphi([x]_R) = f(x) = y$

Luego φ inyectiva y epiyectiva $\Rightarrow \varphi$ biyectiva. ▨

P22 Sea $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ con $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ tal que $f(m+1) > f(f(m))$. Probar que $f(m) = m \ \forall m \in \mathbb{N}^*$
(Olimpiada Mundial, 1977)

Solución:

Probemos primero que $f(1) < f(2) < f(3) < \dots$ y para ello probaremos la afirmación S_m, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ que dice
$$n < m \Rightarrow f(n) < f(m).$$

Definamos $A_i = \{f(i), f(i+1), f(i+2), \dots\}$ conjunto acotado inferiormente por 1, (pues sus elementos pertenecen a $\mathbb{N}^*$) por lo que tiene un menor elemento (recordar que sus elementos son "enteros" positivos) ↓
↳ es mínimo e ínfimo.

Probemos S_1 : Si $1 < m \Rightarrow f(m) > f(f(m-1)) = f(n)$
con $n = f(m-1) \geq 1$ $\quad \underbrace{f(n)}_{\in \mathbb{N}^*}$ pues $m > 1$

Luego $\underset{(m>1)}{f(m)}$ no es el menor elemento de $A_1 = \{f(1), f(2), \dots\}$

Luego su $\underbrace{\text{menor elemento}}_{\text{que existe por lo anteriormente explicado}}$ es $f(1) \Rightarrow f(1) < f(m)\ (\forall m > 1)$

Luego S_1 es cierta!

Supongamos ciertos $S_1, S_2, \dots, S_m$ y probemos S_{m+1}

Notemos que $S_1 \Rightarrow f(1) < f(2)$
$S_2 \Rightarrow f(2) < f(3)$
$\vdots$
$S_m \Rightarrow f(m) < f(m+1)$

Pruébelo por inducción

Luego $f(m) > f(m-1) > \dots > f(1) \geq 1 \ \therefore f(m) \geq m$
(Por qué?)

Pdq : S_{m+1} cierto, o sea $m > n+1 \Rightarrow f(m) > f(n+1)$.

Pero $m > n+1 \Rightarrow m-1 > n \Rightarrow f(m-1) > f(n) \leftarrow$ Por S_m

Luego $f(m-1) > f(m) \geq m \Rightarrow f(m-1) > m \Rightarrow f(m-1) \underset{(*)}{\geq} m+1$

Por lo tanto si $m > m+1$, entonces

$$f(m) > f(f(m-1)) = f(s) \text{ con } s = f(m-1) \geq m+1$$

Por ende $\underset{m>m+1}{\underline{f(m)}}$ no puede ser el menor elemento de $A_{m+1} = \{f(m+1), f(m+2), f(m+3), \dots\}$ ↑ Por (*)

Luego no queda otra que el menor elemento de A_{m+1} sea $f(m+1) \Rightarrow f(m+1) < f(m) \quad \forall m > m+1$.

Luego S_{m+1} es cierta.

Así probamos que $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq \dots$ o sea que $m \leq n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$

Si para algún m, $f(m) \geq m+1 \Rightarrow f(f(m)) \geq f(m+1)$

pero $f(m+1) > f(f(m))$

$(\rightarrow\leftarrow)$

Luego $(\forall m \in \mathbb{N}^*)$ $f(m) \leq m$

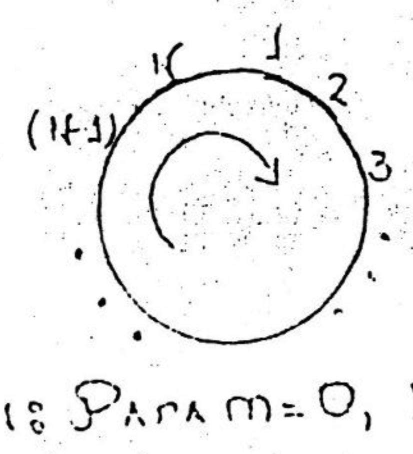
pero como $f(m) > f(m-1) > f(m-2) > \dots > f(1) \geq 1$

$\Rightarrow f(m) \geq m$ (¿Porqué?)

Luego $f(m) = m$ $(\forall m \in \mathbb{N}^*)$ ▨

P23 Inicialmente se disponen N personas numeradas de 1 a N como se indica en la figura. Las personas se retiran del círculo sucesivamente una por medio (i.e. una sí, otra no, una sí, ...) en el sentido de los punteros del reloj, comenzando con la numerada "2" y hasta que solo queda 1 persona. Pruebe por inducción que cuando $N = 2^m$, para algún $m \in \mathbb{N}$, la persona que queda al final es aquella cuya numeración inicial es 1. Explicite bien su hipótesis inductiva.

(Control 2, 2001)

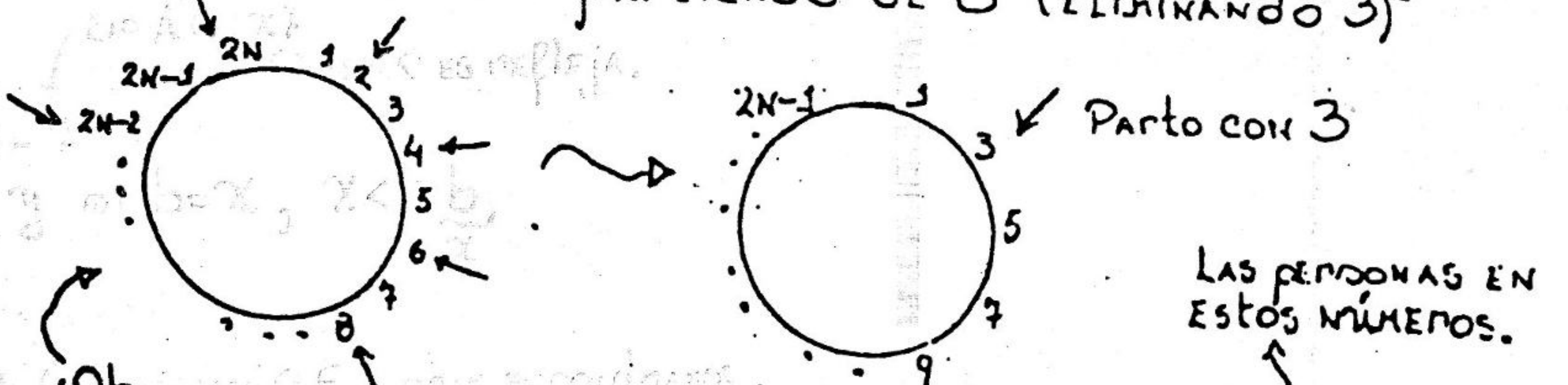


Solución: Para $m=0$, $N = 2^0 = 1$ persona (Ni siquiera se alcanza a jugar)

Para $m=1$, $N = 2^1 = 2$ personas, de las cuales se elimina a la segunda, y queda la primera.

Hipótesis de Inducción: Si en un grupo de $N = 2^m$ personas se juega eliminando la segunda de ellas comenzando, entonces solo va a quedar la persona.

Probemos la afirmación para $m+1$, o sea si tengo $\tilde{N} = 2^{m+1} = 2\cdot 2^m = 2N$ personas y jugamos eliminando primero la segunda de ellas, entonces será la primera de ellas la que quede al final.
Si parto con 2, seguiré con $4, 6, \dots, 2N$ y luego daría una nueva vuelta partiendo de 3 (eliminando 3)



Observamos que fueron eliminados los números pares del conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2N\}$ y quedó la mitad de los números (los impares), o sea quedaron N personas y partimos por la segunda de estas (el 3) entonces la que sobrevive es la primera de ellas, o sea el 1 (la persona con el Nº 1) ▨

Desafío: Calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{2^k}{a^{2^k}+1}$ Hint: Buena suerte, y recuerde las telescópicas.
Si no les sale se lo pueden preguntar a los alumnos de la sección 05.

Primero quiero dedicar esta guía a todos los ex-alumnos del Instituto Nacional, a la gran familia Institutana que por siempre seguirá unida. Ahora un mensaje para todos(as): No le tengan miedo a caerse, no teman del fracaso, pues es del fracaso del cual uno aprende (en el éxito uno no se cuestiona nada). De hecho las personas que más triunfan son aquellas que más veces se han caído, pero la diferencia está en que esas personas luchan hasta el final y nunca bajan los brazos ante una mala batalla pues saben que con su "perseverancia" la guerra está ganada de antemano. Ahora un mensaje para las personas con penas de amor: [illegible]a dejes de sonreír, ni siquiera cuando estés triste, porque nunca sabes quién se puede enamorar de tu sonrisa.
Por último un cariñoso saludo a M.V., a G.J. y a María Belén por enseñarme a sonreír cuando estoy triste. Mucha suerte en el Control, disfruten sus vacaciones, pásenla muy bien e "invítenme" (JeJe)

David MA11A-05