P1a

Hipótesis: $(A \cap B) \subseteq C$

$\iff C^c \subseteq (A \cap B)^c$

$\iff C^c \subseteq (A^c \cup B^c)$ ★ (De Morgan)

Usando esta Hipótesis, tenemos que demostrar que $(A \cap C^c) \subseteq B^c$

Sea $x \in (A \cap C^c)$ arbitrario.

$\iff x \in A \wedge x \in C^c$

$\implies x \in A \wedge x \in (A^c \cup B^c)$ (Por ★)

$\iff x \in A \cap (A^c \cup B^c)$

$\iff x \in (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$ (Distribuitividad)

$\iff x \in \emptyset \cup (A \cap B^c)$ (Idempotencia)

$\iff x \in (A \cap B^c)$ (Idempotencia)

$\implies x \in B^c$ $(A \cap B \subseteq A)$

$\therefore [(A \cap B) \subseteq C] \implies [(A \cap C^c) \subseteq B^c]$

b $A \Delta B = C \quad / A\Delta$

$\Longleftrightarrow A \Delta (A\Delta B) = A \Delta C$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad:

$$
\begin{aligned}
A\Delta(A\Delta B) &= A\setminus(A\Delta B) \cup (A\Delta B)\setminus A && (\text{Def. } \Delta)\\
&= (A\cap(A\Delta B)^c) \cup ((A\Delta B)\cap A^c) && (A\setminus B = A\cap B^c)^{*}\\
&= (A\cap(A\cup B\setminus A\cap B)^c) \cup ((A\cup B\setminus A\cap B)\cap A^c) && (A\Delta B = A\cup B\setminus A\cap B)\\
&= [A\cap((A\cup B)\cap(A\cap B)^c)^c] \cup [(A\cup B)\cap(A\cap B)^c \cap A^c] && (*)\\
&= [A\cap((A\cup B)^c \cup (A\cap B))] \cup [(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)\cap A^c] && (\text{De Morgan})\\
&= [A\cap((A^c\cap B^c)\cup(A\cap B))] \cup [(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)\cap A^c] && (\text{De Morgan})\\
&= [A\cap(A^c\cap B^c)] \cup [A\cap(A\cap B)] \cup [[(A\cap A^c)\cup(B\cap A^c)]\cap(A^c\cup B^c)] && (\text{conmutatividad, distributividad})\\
&= \emptyset \cup [A\cap B] \cup [[\emptyset\cup(A^c\cap B)]\cap(A^c\cup B^c)] && (\text{Distributividad, Idempotencia})\\
&= [A\cap B] \cup [(A^c\cap B)\cap(A^c\cup B^c)] && (\text{Idempotencia})\\
&= [A\cap B] \cup [A^c\cap[(B\cap A^c)\cup(B\cap B^c)]] && (\text{Distributividad})\\
&= (A\cap B) \cup [A^c\cap[(B\cap A^c)\cup\emptyset]] && (\text{Idempotencia})\\
&= (A\cap B) \cup [A^c\cap B] && (\text{Idempotencia})\\
&= B\cap(A\cup A^c) && (\text{Distributividad})\\
&= B\cap U && (\text{Idempotencia})\\
&= B \quad // && (\text{Idempotencia})
\end{aligned}
$$

$\therefore \; A\Delta B = C \Rightarrow B = A\Delta C$

c P.D.Q $A \cap B^c = \emptyset \iff A \subseteq B$

$\Rightarrow$ | Hipótesis: "No existe nadie que viva en A y en B^c a la vez".

si $A \cap B^c = \emptyset$, significa que no existe ningún "x" que esté en A y en B^c, o dicho de otra forma, no existe ningún "x" que esté en A y no esté en B.

Por lo tanto, si $x \in A$, necesariamente pertenece a $B \iff A \subseteq B$.

Demostración Formal:

Sea $x \in A$ arbitrario.

$$
\begin{aligned}
x \in A &\iff x \in A \cap B \lor x \in A \cap B^c \\
&\iff x \in A \cap B \lor x \in \emptyset && (\text{Por Hipótesis}) \\
&\iff x \in A \cap B \lor F && (x \in \emptyset \iff \text{Falso}) \\
&\iff x \in A \cap B && (p \lor F \iff p) \\
&\Rightarrow x \in B
\end{aligned}
$$

$\therefore A \subseteq B$

$\Leftarrow$ | Sea $x \in A \cap B^c$ arbitrario

$$
\begin{aligned}
&\iff x \in A \land x \in B^c \\
&\Rightarrow x \in B \land x \in B^c \\
&\iff x \in (B \cap B^c) \\
&\iff x \in \emptyset
\end{aligned}
$$

$\rightarrow\!|\!\leftarrow$

¡$\nexists x \in \emptyset$!

$\therefore \nexists x \in (A \cap B^c) \Rightarrow A \cap B^c = \emptyset$

$\therefore A \cap B^c = \emptyset \iff A \subseteq B$

P2 P.D.Q Si $U \neq \emptyset$, $A \subseteq U$

$$\underbrace{(\forall X, Y \subseteq U)(A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y)}_{a} \Rightarrow \underbrace{A = \emptyset}_{b}$$

Por contradicción: Sea **a** V y **b** F.

Si **b** es F, entonces $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \bar{x} \in A$

Ahora veamos la parte **a**. Como se tiene que cumplir PARA TODO X, Y; si yo tomo cualquier X y cualquier Y, en particular se tiene que cumplir para esos.

Entonces tomemos $X = \{\bar{x}\}$ $Y = \emptyset$ (son los únicos conjuntos con los que podemos saber como serán unidos con A)
+ la única otra opción era $X = A^c \wedge Y = U$

$$X \cup A = \{\bar{x}\} \cup A = A \quad \wedge \quad Y \cup A = A \cup \emptyset = A$$

$$\Rightarrow X \cup A = Y \cup A$$

Según la hipótesis, si esto pasa, entonces necesariamente $X = Y$

Pero $\{\bar{x}\} \neq \emptyset$

$\rightarrow\!|\!\leftarrow$

$$\therefore (\forall X, Y \subseteq U)(A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y) \Rightarrow A = \emptyset$$

P3

a) Hay 2 casos posibles

1) $B \cap A \neq \emptyset$: $C(B) = B \setminus B = \emptyset$

2) $B \cap A = \emptyset$: $C(B) = B \cup B = B$

Por lo tanto, $C(B) = \emptyset \vee C(B) = B$

$\Rightarrow C(B) \in \{\emptyset, B\}$.

b) Claramente $A \cap A \neq \emptyset$, entonces (recordemos que $A \neq \emptyset$ y $A \cap A = A$)

$C(A) = A \setminus B$

Pero $A \cap A^c = \emptyset$, entonces

$$C(A^c) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{De Morgan}}}{A^c \cup B = (A \cap B^c)^c} = (A \setminus B)^c = (C(A))^c$$

c) $C(X \cap Y) = (X \cap Y) \setminus B = X \cap Y \cap B^c = X \cap Y \cap B^c \cap B^c = (X \cap B^c) \cap (Y \cap B^c)$

Esto está casi listo, pero para poder seguir tenemos que demostrar que $X \cap A \neq \emptyset$ y $Y \cap \neq \emptyset$. Por contradicción, digamos $X \cap A = \emptyset$, entonces $(X \cap Y) \cap A = (X \cap A) \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset \rightarrow\leftarrow$ (por enunciado). La demostración de $Y \cap A$ es análoga. Entonces $(X \cap B^c) \cap (Y \cap B^c) = C(X) \cap C(Y)$ $\therefore C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$ si se cumple la hipótesis.