MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto San Martín.
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal.
Fecha: Jueves 12 de Abril.

Auxiliar 6: Funciones

P1. Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto fijo. $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ se define la función caracterísitica de A como:

$$\delta_A : E \to \{0,1\}$$
$$x \longmapsto \delta_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

(a) Describa $\delta_E(x)$ y $\delta_\emptyset(x), \forall x \in E$.

(b) Demuestre que $\forall x \in E$ se tiene que $\delta_{A\cap B}(x) = \delta_A(x)\delta_B(x)$.

(c) Determine condiciones para que δ_A sea inyectiva.

(d) Determine condiciones para que δ_A sea sobreyectiva.

P2. Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos tales que $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$ y sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \to B \cup D$ tal que, $\forall x \in A \cup C$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ g(x) \text{ si } x \in C \end{cases}$$

(a) Demuestre que si f, g son inyectivas, entonces h también lo es.

(b) Demuestre que si f, g son sobreyectivas, entonces h también lo es.

(c) Demuestre que si f, g son biyectivas, entonces h también lo es y encuentre su inversa.

P3. Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$, $g : B \to A$ y $h : B \to B$ funciones tales que:

- h es biyectiva
- $f \circ g = h$
- $g \circ f = Id_A$

(a) Muestre que f y g son biyectivas.

(b) Muestre que $h = \mathrm{Id}_B$.

P4. Sea $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ es biyectiva }\}$. Es decir E contiene a todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : E \to E$ tal que para cada $f \in E, \Psi(f) = f^{-1}$, es decir, Ψ le asocia a cada función en E su inversa.

(a) Probar que Ψ es biyectiva.

(b) Sean $f, g \in E$. Probar que $\Psi(f \circ g) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$.