P1| a)

• $\delta_E(x) : E \to \{0,1\}$

$$x \mapsto \delta_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E, \end{cases}$$

Pero esta función está definida $\forall x \in E$, por lo que $x \in E$ siempre

$$\boxed{\therefore \delta_E(x) = 1 \qquad \forall x \in E}$$

• $\delta_\emptyset(x) : E \to \{0,1\}$

$$x \mapsto \delta_\emptyset(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \emptyset \\ 0 & \text{si } x \notin \emptyset \end{cases}$$

Pero nunca $x \in \emptyset$, ya que es vacío

$$\boxed{\therefore \delta_\emptyset(x) = 0 \qquad \forall x \in E}$$

b) $\delta_{A \cap B} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \wedge x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin A \vee x \notin B \end{cases}$

caso 1: si $x \in A \wedge x \in B$, $\delta_A(x) = 1 \wedge \delta_B(x) = 1 \Rightarrow \delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = 1$

caso 2: si $x \notin A$, $\delta_A(x) = 0 \Rightarrow \delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = 0$

caso 3: si $x \notin B$, $\delta_B(x) = 0 \Rightarrow \delta_B(x) \cdot \delta_A(x) = 0$

$$\Rightarrow \delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \wedge x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin A \vee x \notin B \end{cases} = \delta_{A \cap B}$$

c) Para que δ_A sea inyectiva, puede haber a lo más un elemento en A y uno que no pertenezca a A. En caso contrario existiría $x \neq y$ tal que $\delta_A(x) = \delta_A(y)$ por lo que no sería inyectiva.

Luego para que δ_A sea inyectiva, $A = \{a\}$ o bien $A = \emptyset$ y además $E \setminus A = \{b\}$ o bien $E \setminus A = \emptyset$.

d) Para que δ_A sea sobreyectiva, debe existir al menos un "x" tal que $\delta_A(x) = 1$ y al menos un "y" tal que $\delta_A(y) = 0$

Luego para que δ_A sea sobreyectiva, se debe cumplir que $A \neq \emptyset$ y $E \setminus A \neq \emptyset$

P2 a) P.D.Q $(\forall x,y \in A \cup C)\ h(x) = h(y) \Rightarrow x = y$

caso 1: $x, y \in A$

$$h(x) = h(y)$$
$$\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$
$$\Rightarrow x = y \quad \text{(porque } f \text{ es inyectiva)}$$

caso 2: $x, y \in C$

$$h(x) = h(y)$$
$$\Leftrightarrow g(x) = g(y)$$
$$\Rightarrow x = y \quad \text{(porque } g \text{ es inyectiva)}$$

caso 3: $x \in C \wedge y \in A$

$$h(x) = h(y)$$
$$\Leftrightarrow g(x) = f(y)$$

$\rightarrow\!|\!\leftarrow$ contradicción

$g: C \to D$ y $f: A \to B$

$$\Rightarrow g(x) \in D \wedge f(y) \in B$$

pero $B \cap D = \emptyset$

$$\therefore g(x) \neq f(y) \quad \forall x, y.$$

y por lo tanto este caso no es posible.

Lo mismo pasa si $x \in A \wedge y \in C$.

$\therefore$ si f y g son inyectivas, h es inyectiva

b) P.D.Q $(\forall y \in B \cup D)(\exists x \in A \cup C)$ tq' $h(x)=y$

Caso 1: $y \in B$

Basta tomar $x \in A$ tal que $f(x)=y$ (que existe porque f es sobreyectiva) y entonces $h(x) = f(x) = y$. //

Caso 2: $y \in D$

Basta tomar $x \in C$ tal que $g(x)=y$ (que existe porque g es sobreyectiva) y entonces $h(x) = g(x) = y$.

$\therefore$ si f, g son sobreyectivas, entonces h es sobreyectiva.

c) Si f y g son biyectivas, en particular son inyectivas y sobreyectivas.

De (a) tenemos que: f, g iny. $\Rightarrow$ h iny.
De (b) tenemos que: f, g sobre. $\Rightarrow$ h sobre.

$\therefore$ si f y g son biyectivas, h es biyectiva.

Ahora tenemos que encontrar la inversa.

$$h^{-1}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & \text{si } x \in B \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in D \end{cases}$$

(es evidentemente la función que se "devuelve")

Comprobemos que $h^{-1}(h(x)) = x$

Caso 1: $x \in A$

$h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(f(x))$, y como $f(x) \in B$

$= f^{-1}(f(x)) = x$.

Caso 2: $x \in C$

$h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(g(x))$, y como $g(x) \in D$

$= g^{-1}(g(x)) = x$ //.

P3 Recordemos que $\forall f, g$ funciones

$f \circ g$ inyectiva $\Rightarrow$ g inyectiva

$f \circ g$ sobreyectiva $\Rightarrow$ f sobreyectiva.

i) Si h es biyectiva y $f \circ g = h$, entonces

$f \circ g$ es biyectiva

$\Leftrightarrow$ $f \circ g$ es inyectiva $\wedge$ $f \circ g$ es sobreyectiva

$\Rightarrow$ g es inyectiva $\wedge$ f es sobreyectiva.

También sabemos que $g \circ f = Id\ A$. La identidad siempre es biyectiva y por lo tanto, $g \circ f$ es biyectiva.

$\Leftrightarrow$ $g \circ f$ es inyectiva $\wedge$ $g \circ f$ es sobreyectiva.

$\Rightarrow$ f inyectiva $\wedge$ g sobreyectiva.

Ya que f y g son inyectivas y sobreyectivas,

f y g son biyectivas.

ii) Tenemos que $f \circ g = h \quad / g \circ$

$$g \circ f \circ g = g \circ h$$

$$\Leftrightarrow \quad Id_A \circ g = g \circ h$$

$$\Leftrightarrow \quad g = g \circ h \quad / g^{-1} \circ$$

(Que existe porque g es biyectiva)

$$g^{-1} \circ g = g^{-1} \circ g \circ h$$

$$\Leftrightarrow \quad id_B = id_B \circ h$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{id_B = h}$$

P4

a) Recordemos que

$$\Psi \text{ Biyectiva} \Longleftrightarrow \text{Existe } \Psi^{-1}.$$

Entonces encontremos la inversa

estamos buscando una función tal que

$$g(\Psi(f)) = f$$

$$g(f^{-1}) = f$$

osea que g también es una función que te devuelve la inversa!

entonces $g = \Psi^{-1}$ ya que es función

y $\Psi^{-1}(\Psi(f)) = Id_E = f$ //.

Como la inversa existe, entonces la función es biyectiva.

b) $\Psi(f \circ g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = \Psi(g) \circ \Psi(f)$ //