"Guía de Funciones"
MA11A

P1 Sean $f: E \to F$ y $g: F \to G$ funciones (no necesariamente biyectivas)

(a) Sea $A \subseteq G$. Probar que
$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

(b) Sea $B \subseteq F$. Probar que
$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$ (Control 1, 1999)

Solución:

(a) Pdq: $x \in (g \circ f)^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$

Dem:
$$\begin{aligned} x \in (g \circ f)^{-1}(A) &\Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in A \\ &\Leftrightarrow g(f(x)) \in A \\ &\Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(A) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A)) \end{aligned}$$

(b) Pdq $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \cap f(E) \ \wedge \ B \cap f(E) \subseteq f(f^{-1}(B))$

$f(f^{-1}(B)) \subseteq B \cap f(E)$:
$$\begin{aligned} y \in f(f^{-1}(B)) &\Leftrightarrow \underbrace{(\exists x \in f^{-1}(B))}\ f(x) = y \\ &\Rightarrow f(x) \in B \ \wedge \ f(x) = y \\ &\Rightarrow y \in B \text{ y claramente } x \in E \\ &\Rightarrow y \in B \ \wedge \ \underbrace{f(x)}_{y} \in f(E) \\ &\Rightarrow y \in B \cap f(E) \end{aligned}$$

Pues $x \in E \Rightarrow f(x) \in f(E)$

$y \in (B \cap f(E))$

$B \cap f(E) \subseteq f(f^{-1}(B))$:
$$\begin{aligned} & y \in B \ \wedge \ y \in f(E) \\ &\Leftrightarrow y \in B \ \wedge \ (\exists x \in E)\ f(x) = y \\ &\Rightarrow f(x) = y \in B \\ &\Rightarrow f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \\ &\Rightarrow \underbrace{f(x)}_{y} \in f(f^{-1}(B)) \end{aligned}$$

Si $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$

$\blacksquare$

P2 Sea $f: E \to F$ una función

a) Demostrar que $(\forall A,B\subseteq E)\ f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$

b) Demostrar que:
$$[(\forall A,B\subseteq E)\ f(A)\setminus f(B)=f(A\setminus B)] \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva.}$$

c) Demostrar que:
$$[(\forall A,B\subseteq E)\ f(A)\cap f(B)=f(A\cap B)] \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva.}$$

d) Demostrar que:
$$[(\forall Y\subseteq F)\ f(f^{-1}(Y))=Y] \Leftrightarrow f \text{ es epiyectiva.}$$

e) Demostrar que
$$[(\forall A,B\subseteq E)\ f(A\Delta B)=f(A)\Delta f(B)] \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva.}$$

Solución:

a) $y\in[f(A)\setminus f(B)] \Leftrightarrow y\in f(A) \wedge \sim y\in f(B)$

$\Leftrightarrow (\exists x_1\in A)\ f(x_1)=y \wedge \sim(\exists x_2\in B)\ f(x_2)=y$

$\Rightarrow x_1\in A \wedge x_1\notin B \wedge f(x_1)=y$

* $\Rightarrow (\exists x_1\in(A\setminus B))\ f(x_1)=y \Leftrightarrow y\in f(A\setminus B)$

b) ($\Rightarrow$) Pdq $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ [Forma contrarecíproca de la inyectividad]

Tomando $A=\{x_1\}$ y $B=\{x_2\}$ con $x_1\neq x_2$

* $\Rightarrow f(\{x_1\})\setminus f(\{x_2\}) = f(\underbrace{\{x_1\}\setminus\{x_2\}}_{\{x_1\}})$ (Pues $x_1\neq x_2$)

$\{f(x_1)\}\setminus\{f(x_2)\} = \{f(x_1)\}$

Luego, necesariamente $f(x_1)\neq f(x_2)$

Nota: Si $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \{f(x_1)\}\setminus\{f(x_2)\}=\phi=\{f(x_1)\}$ ($\Rightarrow\Leftarrow$)

($\Leftarrow$) Es gratis que $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$ (Parte (a))

Nos falta probar que:

$f(A\setminus B)\subseteq f(A)\setminus f(B)$ (Suponiendo f inyectiva)

$y\in f(A\setminus B) \Leftrightarrow (\exists x\in A\setminus B)\ f(x)=y$

$\Rightarrow (\exists x\in(A\setminus B)\subseteq A)\ f(x)=y \wedge \overset{(*)}{\sim}(\exists\bar x\in B)\ f(\bar x)=y$

$\Leftrightarrow y\in f(A)\wedge\sim y\in f(B)$

$\Leftrightarrow y\in f(A)\setminus f(B)$

(*) 

$x\in(A\setminus B)$
$\bar x\in B$

Si existiera $\bar x\in B$ tq $\underbrace{f(\bar x)=y=f(x)\Rightarrow x=\bar x}_{\text{Pues } f \text{ inyectiva}}$ ($\Rightarrow\Leftarrow$) x y $\bar x$ están en conjuntos disjuntos ($A\setminus B$ y B)

3

c) $(\Rightarrow)$ Pdq $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
Tomando $A = \{x_1\}$ y $B = \{x_2\}$ con $x_1 \neq x_2$
$\Rightarrow f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\underbrace{\{x_1\} \cap \{x_2\}}_{\phi})$ (Pues $x_1 \neq x_2$)
$\{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \phi$
o sea $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$(\Leftarrow)$ Es gratis que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ (Propiedad de imagen)
Solo queda probar que:
$f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ (suponiendo f inyectiva)

$y \in [f(A) \cap f(B)] \Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B)$
$\Leftrightarrow (\exists x_1 \in A)\ f(x_1) = y \wedge (\exists x_2 \in B)\ f(x_2) = y$
(Por inyectividad $y = f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$) $\Rightarrow (\exists \bar{x} = x_1 = x_2 \in (A \cap B))\ f(\bar{x}) = y$
($\bar{x} \in A$ pues $x_1 \in A$; $\bar{x} \in B$ pues $x_2 \in B$)
$\Leftrightarrow y \in f(A \cap B)$.

d) $(\Rightarrow)$ Tomando en particular $Y = F$, se tiene
$f(f^{-1}(F)) = F \Rightarrow f(E) = F$ (f es epiyectiva)
Pues $f^{-1}(F) = E$. (Para cualquier función)

$(\Leftarrow)$ $y \in Y \Rightarrow (\exists x \in E)\ f(x) = y$ (Pues f epiyectiva)
$\Rightarrow \underbrace{y = f(x) \in Y}_{\text{pues } y \in Y} \Rightarrow f(x) \in Y \Rightarrow x \in f^{-1}(Y)$
$\Rightarrow \underbrace{f(x)}_{y} \in f(f^{-1}(Y))$

o sea $Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$
y es gratis que $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

e) $(\Rightarrow)$ Pdq $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (Donde he visto esto antes?)
Tomando $A = \{x_1\}$ y $B = \{x_2\}$ $(x_1 \neq x_2)$
$f(\underbrace{\{x_1\} \triangle \{x_2\}}_{(\{x_1\} \cup \{x_2\}) \setminus (\{x_1\} \cap \{x_2\})}) = f(\{x_1\}) \triangle f(\{x_2\})$
$\{x_1\} \cup \{x_2\} = \{x_1, x_2\}$, $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \phi$
$f(\{x_1, x_2\}) = \{f(x_1)\} \triangle \{f(x_2)\}$

Ahora, si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \{f(x_1)\} \triangle \{f(x_2)\} = \phi = f(\{x_1, x_2\})$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

Luego, necesariamente $f(x_1) \neq f(x_2)$

$(\Leftarrow)$ $f(A \triangle B) = f((A\setminus B)\cup(B\setminus A))$ Propiedad de imagen
$= f(A\setminus B) \cup f(B\setminus A)$

Pues f inyectiva (Parte (b)) $= [f(A)\setminus f(B)] \cup [f(B)\setminus f(A)]$
$= f(A) \triangle f(B)$ ▨

P3 Sea $f: E \to F$ una función. Probar que:

a) $\left[(\forall A \subseteq E)\ \ f(A^c) \subseteq [f(A)]^c\right] \Leftrightarrow f$ inyectiva

b) $\left[(\forall A \subseteq E)\ \ [f(A)]^c \subseteq f(A^c)\right] \Leftrightarrow f$ epiyectiva.

Concluir que $\left[(\forall A \subseteq E)\ \ f(A^c) = [f(A)]^c\right] \Leftrightarrow f$ biyectiva.

Solución:

a) $(\Rightarrow)$ Pdq $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Si $x_1 \neq x_2$ tomamos $A = \{x_1\}$ y por ende $x_2 \in A^c$ $(x_2 \notin A)$

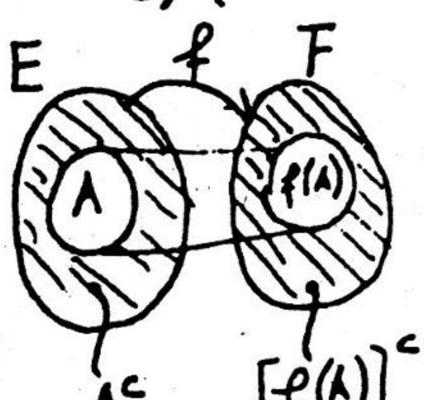
$x_2 \in A^c \Rightarrow f(x_2) \in f(A^c) \subseteq [f(A)]^c$
$\Rightarrow f(x_2) \in [f(A)]^c \Rightarrow f(x_2) \notin f(A) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\}$

Entonces $f(x_2) \neq f(x_1)$.

$(\Leftarrow)$ $y \in f(A^c) \Leftrightarrow (\exists x \in A^c)\ f(x) = y$ * (Por inyectividad de f)
$\Rightarrow \sim(\exists \bar{x} \in A)\ f(\bar{x}) = y$
$\Leftrightarrow \sim y \in f(A) \Leftrightarrow y \in [f(A)]^c$

(*) En caso de existir $\bar{x} \in A$ tq $f(\bar{x}) = y = f(x)$ $\Rightarrow x = \bar{x}$ } Pues f inyectiva
donde $x \in A^c$ y $\bar{x} \in A$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

b) $(\Rightarrow)$ Tomando $A = \phi \Rightarrow f(A) = \phi \Rightarrow \underbrace{[f(A)]^c = F}_{\text{Ver dibujo.}}$



Estos complementos son c/r a E y F respectivamente.

y $f(A^c) = f(E)$

y como $[f(A)]^c \subseteq f(A^c)$ (Con $A = \phi$)
$\Rightarrow F \subseteq f(E)$ y como es gratis que $f(E) \subseteq F$

$\therefore f(E) = F$ (f es epiyectiva)

$(\Leftarrow)$ Pdq $[f(A)]^c \subseteq f(A^c)$

$$y \in [f(A)]^c \Leftrightarrow \sim[y \in f(A)] \Leftrightarrow \sim(\exists x \in A)\ f(x) = y$$

$$\Rightarrow (\exists \bar{x} \in A^c)\ f(\bar{x}) = y \Leftrightarrow y \in f(A^c)$$

Pues f es epiyectiva

$(\forall y \in F)(\exists x \in E)\ f(x) = y$ si $x \notin A$ entonces $\bar{x} \in A^c$ (Pues debe existir)

Concluimos que
$$((\forall A \subseteq E)\ f(A^c) = [f(A)]^c) \Leftrightarrow (\forall A \subseteq E)\ f(A^c) \subseteq [f(A)]^c \wedge [f(A)]^c \subseteq f(A^c)$$

$\Leftrightarrow f$ inyectiva $\wedge$ f epiyectiva

$\Leftrightarrow f$ biyectiva. ■

P4 Sea $f : E \to F$ una función. Se dice que $A \subseteq E$ es estable si $f^{-1}(f(A)) = A$

a) Probar que si $A, B \subseteq E$ son estables, entonces A^c, $A \cup B$ y $A \cap B$ también lo son.

b) f inyectiva $\Leftrightarrow (\forall A \subseteq E)\ f^{-1}(f(A)) = A$

Solución:

a) Pdq A^c es estable (si A lo es), o sea $f^{-1}(f(A^c)) = A^c$ sabiendo que $f^{-1}(f(A)) = A$

Es gratis que $A^c \subseteq f^{-1}(f(A^c))$ $\left[\begin{array}{l}\forall X \subseteq E \\ f^{-1}(f(X)) \supseteq X\end{array}\right]$

Luego basta probar que:
$$f^{-1}(f(A^c)) \subseteq A^c$$

Sea $x \in f^{-1}(f(A^c))$. Pdq $x \in A^c$. Supongamos que $x \in A$ (y por ende buscaremos una contradicción)

$$x \in f^{-1}(f(A^c)) \wedge x \in A \Leftrightarrow f(x) \in f(A^c) \wedge x \in A$$

$$\Rightarrow (\exists \bar{x} \in A^c)\ f(\bar{x}) = f(x) \wedge f(x) \in f(A)$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) = f(x) \in f(A)$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) \in f(A) \Leftrightarrow \bar{x} \in f^{-1}(f(A)) = A$$

$$\Rightarrow \bar{x} \in A \text{ pero } \bar{x} \in A^c \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Luego, necesariamente $x \in A^c$.

Pdq $A \cup B$ es estable (si A y B lo son)
o sea $f^{-1}(f(A \cup B)) = f^{-1}(f(A) \cup f(B))$

Propiedad de imagen

$= \underbrace{f^{-1}(f(A))}_{A} \cup \underbrace{f^{-1}(f(B))}_{B} = A \cup B.$

Pues A y B son estables

Pdq $A \cap B$ es estable (si A y B lo son)
Como A, B son estables, A^c, B^c también lo son
$\Rightarrow A^c \cup B^c$ también es estable.
$\Rightarrow (A^c \cup B^c)^c = A \cap B$ también es estable.

b) ($\Rightarrow$) Es gratis que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
Pdq $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$

$x \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow (\exists \bar{x} \in A)\, f(\bar{x}) = f(x)$

$\Rightarrow \bar{x} = x$ (Pues f inyectiva)

pero $\bar{x} \in A$
$\Rightarrow x \in A$.

($\Leftarrow$) Pdq $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (solo la experiencia les dira si usar esta o su contrarecíproca)

Tomando $A = \{x_1\}$
$f(A) = \{f(x_1)\}$ pero como $f(x_1) = f(x_2)$
$\Rightarrow f(x_2) \in f(A)$
$\Leftrightarrow x_2 \in f^{-1}(f(A)) = A$ o sea $x_2 \in A = \{x_1\}$
$\Rightarrow x_2 = x_1$. ▨

P5 Sean $f: A \to B$ y $g: A' \to B'$ dos funciones biyectivas.
Definimos $\mathcal{F}_{A,A'} = \{h : A \to A' \,/\, h \text{ es función}\}$ y
$\mathcal{F}_{B,B'} = \{h : B \to B' \,/\, h \text{ es función}\}$
Considere $\psi : \mathcal{F}_{A,A'} \to \mathcal{F}_{B,B'}$
$h \to \psi(h) = g \circ h \circ f^{-1}$.

(i) Probar que ψ es una biyección.
(ii) Probar que:
a) h inyectiva $\Leftrightarrow \psi(h)$ inyectiva.
b) h epiyectiva $\Leftrightarrow \psi(h)$ epiyectiva.

Solución:

(i) Pdq

$(\forall \bar{h} \in \mathcal{F}_{B,B'})(\exists! h \in \mathcal{F}_{A,A'})\ \psi(h)=\bar{h}$

Por la burbujita, si h existe, debe ser $h = g^{-1}\circ \bar{h} \circ f$

$$g\circ h \circ f^{-1} = \bar{h} \ /\ (\ )\circ f$$
$$(g\circ h)\circ(\underbrace{f^{-1}\circ f}_{id_A}) = \bar{h}\circ f$$
$$g^{-1}\circ \to \quad g\circ h = \bar{h}\circ f$$
$$\underbrace{g^{-1}\circ g}_{id_{A'}}\circ h = g^{-1}\circ \bar{h}\circ f$$
$$\Rightarrow h = g^{-1}\circ \bar{h}\circ f$$

Verifiquemos:

$$\psi(h) = g\circ h \circ f^{-1}$$
$$= g\circ(g^{-1}\circ \bar{h}\circ f)\circ f^{-1}$$
$$= \underbrace{(g\circ g^{-1})}_{id_{B'}}\circ \bar{h}\circ \underbrace{(f\circ f^{-1})}_{id_B} = \bar{h} \quad //$$

asociando.

Luego existe, y como lo pudimos "despejar" necesariamente ese es el único h que satisface $\psi(h)=\bar{h}$

(ii) (a) Si f y g biyectivas, existen f^{-1} y g^{-1} y son "biyectivas"

($\Rightarrow$) Si h inyectiva $\Rightarrow \psi(h) = \underbrace{g}_{\text{inyectiva}}\circ \underbrace{h}_{\text{iny.}}\circ \underbrace{f^{-1}}_{\text{inyectiva}}$

$h : A \to A'$

$ID_{A'} : A' \to A'$

$ID_{A'}\circ h = h$

(En particular, pues son biyectivas)

$\Rightarrow \psi(h)$ inyectiva (es composición de inyectivas)

($\Leftarrow$) Si $\psi(h) = g\circ h\circ f^{-1}$ inyectiva,

$h = \underbrace{g^{-1}}_{\text{inyectiva}}\circ\underbrace{(g\circ h\circ f^{-1})}_{\text{inyectiva}}\circ \underbrace{f}_{\text{inyectiva}}$ es inyectiva pues es composición de inyectivas.

(En particular)

(b) Análogo (donde escribimos "inyectiva" ponemos "epiyectiva" y todo funciona bien) Hacerlo! ∎

P6 Sea $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tq $\forall x\in\mathbb{R}, (f\circ f)(x) = x+1$

(i) Probar que f es biyectiva.

(ii) Probar que no es cierto que $(\forall x,y\in\mathbb{R})\ f(x+y) = f(x)+f(y)$

Solución: Recordemos que si $f: A \to B$ y $g: B \to C$

$\therefore$ $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva.

$g \circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow g$ sobreyectiva.

Nota: Según tengo entendido, en la prueba si las quieren usar deben probarlas (Hacerlo como ejercicio!)

a) Sabemos que $h(x) = ax + b$ con $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ es biyectiva. (si $a = 0$ no es inyectiva)

Luego $(f \circ f)_{(x)} = x + 1$ es biyectiva
Como es en particular inyectiva $(\underset{\uparrow f \text{ es inyectiva}}{f \circ f})$

y como también es epiyectiva $(\underset{\uparrow f \text{ es epiyectiva}}{f \circ f})$

$\Rightarrow f$ es biyectiva.

b) Si $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$$\Rightarrow \underbrace{f(f(x+y))}_{x+y+1} = f(f(x) + f(y)) = \underbrace{f(f(x))}_{x+1} + \underbrace{f(f(y))}_{y+1}$$

$(\Rightarrow \Leftarrow)$ ▨

P7 (a) Sean $f: E \to F$ y $g: F \to E$ dos funciones tales que $g \circ f = id_E$. Probar que f es inyectiva y g es sobreyectiva.

(b) $(\forall a, b \in \mathbb{R})$ se define $f_{a,b}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la fórmula $f_{a,b}(x) = ax + b$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(i) Pruebe que $f_{1,b} \circ f_{a,c} = f_{a,b}$

(ii) Para $a \neq 0$, pruebe que $f_{a,b}$ es biyectiva.

(iii) Para $a \neq 0$, determine $f^{-1}_{a,b}$

(iv) Para $a \neq 0$, determine p, q tq $f_{a,b} \circ f_{p,q} = f_{b,a}$

Solución:

(a) De lo anterior (P6), $g \circ f = id_E$ es una función biyectiva

Luego $g \circ f$.

(Pues en particular $g \circ f$ es epiyectiva) es epiyectiva — es inyectiva (Pues en particular $g \circ f$ inyectiva)

(b) (i) $f_{1,b}(x) = 1\cdot x + b = x+b$ y $f_{a,0}(x) = a\cdot x + 0 = ax$

$$\Rightarrow (f_{1,b}\circ f_{a,0})_{(x)} = f_{1,b}(f_{a,0}(x)) = f_{1,b}(ax) = ax+b = f_{a,b}(x).$$

(ii) Pdq $(\forall y\in\mathbb{R})(\exists!\, x\in\mathbb{R})\ f_{a,b}(x) = y$

Luego tomando $x = \frac{y-b}{a}$

$$f_{a,b}(x) = ax+b = a\left(\frac{y-b}{a}\right)+b = y-b+b = y$$

Luego existía el x para $a\neq 0$ y como lo despejamos en la burbujita necesariamente $x=\frac{y-b}{a}$, o sea es único.

$ax+b=y$
$\Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$ si "$a\neq 0$"

(iii) Usando la burbujita $x = \frac{y-b}{a}$

Cambiando "x" con "y" queda $y = \frac{x-b}{a}$

$$\Rightarrow f_{a,b}^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

(iv) Tenemos $f_{a,b}(f_{p,q}(x)) = f_{b,a}(x)$

$$\Leftrightarrow f_{a,b}(px+q) = bx+a$$
$$\Leftrightarrow a(px+q)+b = bx+a$$
$$\Leftrightarrow apx + (aq+b) = bx+a$$

(En $x=0$ $\Rightarrow aq+b=a$) $\therefore apx = bx$ y en $x=1$ $ap=b$

Luego $ap=b$ y $aq+b=a$

$p=\frac{b}{a}$ y $q = \frac{a-b}{a}$ cuando $a\neq 0$. ∎

P8 (a) Sea $f: E\to F$ una función y $A,B\subseteq E$. Pruebe que
$f(B)\setminus f(A) = \phi \Rightarrow f(A\cup B) = f(A)$
(control 1, 1998)

(b) Sea $f: E\to F$ una función que satisface la propiedad
$(\forall A,B\subseteq E)(A\subseteq B \wedge A\neq B \Rightarrow f(A)\neq f(B))$
Probar que f es inyectiva. (control 1, 1998)

(c) Sean $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones. Determine explícitamente f y g sabiendo que $(g\circ f)(x)=\dfrac{3x+2}{9x^2+12x+5}$ y $f^{-1}(x)=\dfrac{x-2}{3}$ en cada $x\in\mathbb{R}$. (Control 1, 1998)

Solución:

(a) Si $f(B)\setminus f(A)=f(B)\cap[f(A)]^c=\phi \quad / \cup f(A)$

$$\Rightarrow [f(B)\cup f(A)]\cap[\underbrace{[f(A)]^c\cup f(A)}_{F}]=f(A)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(B)\cup f(A)}=f(A)$$ Propiedad de imagen.

$$\Rightarrow f(A\cup B)=f(A)$$

(b) Pdq $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ (o sea que f inyectiva)

Tomando:

$A=\{x_1\}$ y $B=\{x_1,x_2\}$ claramente $A\subseteq B$ (con $x_1\neq x_2$) y $A\neq B$ (pues $x_1\neq x_2$)

$$\Rightarrow f(A)\neq f(B)\Rightarrow \underbrace{f(\{x_1\})}_{\{f(x_1)\}}\neq \underbrace{f(\{x_1,x_2\})}_{\{f(x_1),f(x_2)\}}$$

$$\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$ (Es imposible que $f(x_1)=f(x_2)$)

(c) Si $f^{-1}(x)=\dfrac{x-2}{3}$, $y=\dfrac{x-2}{3}\Rightarrow 3y+2=x$

Cambiando x con y

$y=3x+2$

$f(x)=3x+2$

Notar que $(g\circ f)(x)=\dfrac{3x+2}{(3x)^2+4(3x)+5}$

$$(g\circ f)(f^{-1}(x))=g(x)=(g\circ f)\left(\frac{x-2}{3}\right)=\frac{\cancel{3}\left(\frac{x-2}{\cancel{3}}\right)+2}{\left(\cancel{3}\left(\frac{x-2}{\cancel{3}}\right)\right)^2+4\left(\cancel{3}\cdot\left(\frac{x-2}{\cancel{3}}\right)\right)+5}$$

$$=\frac{x}{(x-2)^2+4(x-2)+5}=\frac{x}{x^2+1}$$

P9/ (a) Probar que $\forall A,B,C$ conjuntos se tiene

(a.1) $A\triangle B=A\triangle C\Rightarrow B=C$ (Control 1, 1998)

(a.2) $A\triangle B=C\Rightarrow B=A\triangle C$

(b) Sea $A\subseteq E$ y $f:\mathcal{P}(E)\to\mathcal{P}(E)$ tq $f(X)=X\triangle A$ para cada $X\subseteq E$. Probar que f es biyectiva y determine la función inversa de f. (Control 1, 1998)

Solución:

(a) (a.1) Si $A \triangle B = A \triangle C \;/\; A\triangle(\;)$

$$A\triangle(A\triangle B) = A\triangle(A\triangle C) \text{) Asociatividad de } \triangle$$

$$\underbrace{\underbrace{(A\triangle A)}_{\phi}\triangle B}_{B} = \underbrace{\underbrace{(A\triangle A)}_{\phi}\triangle C}_{C}$$

(a.2) Si $A\triangle B = C$) Asociatividad de $\triangle$

$$\Rightarrow A\triangle C = A\triangle(A\triangle B)$$
$$= \underbrace{(A\triangle A)}_{\phi}\triangle B = B$$

(b) Pdq $(\forall \underbrace{Y\in \mathcal{P}(E)}_{Y\subseteq E})(\exists \underbrace{X\in\mathcal{P}(E)}_{X\subseteq E})\; f(X) = Y$ (Epiyectividad)

Tomando $X = A\triangle Y$

$$f(X) = X\triangle A = (A\triangle Y)\triangle A \text{) Conmuto}$$
$$\text{Asocio. } \quad = (Y\triangle A)\triangle A$$
$$= Y\triangle \underbrace{(A\triangle A)}_{\phi} = Y$$

$X\triangle A = Y$) Conmuto
$A\triangle X = Y$
$\Rightarrow X = A\triangle Y$
(Parte (a.2))

Como lo despejamos podríamos decir que es único y la función es biyectiva pero si no se convencen, probemos la inyectividad de f

$$f(X_1) = f(X_2) \Leftrightarrow X_1\triangle A = X_2\triangle A \text{) Conmuto}$$
$$\Leftrightarrow A\triangle X_1 = A\triangle X_2 \text{) Parte (a.1)}$$
$$\Rightarrow X_1 = X_2$$

Como en la burbujita despejamos X,

$\therefore X = A\triangle Y$ y cambiando X con Y

$$\Rightarrow Y = A\triangle X$$
$$\Rightarrow f^{-1}(X) = A\triangle X \quad ▨$$

P10 Sean $E \neq \phi$ y $A \subseteq E$ fijo. Se definen f y $g: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ tales que $f(X) = A\cup X$ y $g(X) = A\cap X$, para todo $X\subseteq E$.

(i) Determinar $f(\phi)$, $f(A)$, $f(A^c)$, $f(E)$.

(ii) Demostrar que $g\circ f = f\circ g$.

(iii) Determinar si f y g son sobreyectivas.

(iv) Determinar un conjunto A para el cual f es biyectiva.

(v) Determinar un conjunto A para el cual f es biyectiva.

$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$

Solución:

(i) $f(\phi) = A \cup \phi = A$
$f(A) = A \cup A = A$
$f(A^c) = A \cup A^c = E$
$f(E) = A \cup E = E$

Notar que $f(A)$ no es imagen sino que es la función aplicada a $\underbrace{A \in \mathcal{P}(E)}_{A \subseteq E.}$

Lo que pasa es que la función f se aplica a conjuntos.

(ii) Pdq $(g \circ f)(X) = (f \circ g)(X)$ $\quad g \circ f, f \circ g : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$

$g(f(X)) = g(A \cup X) = A \cap (A \cup X) = A.$ pues $A \subseteq A \cup X$

$f(g(X)) = f(A \cap X) = A \cup (A \cap X) = A.$ pues $A \cap X \subseteq A$

Iguales.

(iii) En general no. Si $A \neq \phi$
$(\nexists X \subseteq E)\ \underbrace{f(X)}_{A \cup X} = \phi$ (Nadie genera al ϕ)
↳ Por lo menos tiene los elementos de $A \neq \phi$

Para f.

En general no. Si $A \neq E$
$(\nexists X \subseteq E)\ \underbrace{g(X)}_{A \cap X} = E$
↳ $\underbrace{\underbrace{A \cap X}_{E} \subseteq A}_{\text{No puede ser al menos que } A = E}$

Para g

(iv y v) La parte (iii) nos anticipa los "A" a tomar
Para f: Si $A = \phi$ $\quad f(X) = \phi \cup X = X$
Para g: Si $A = E$ $\quad g(X) = E \cap X = X$

y $f(X) = X$ (Identidad para conjuntos) claramente es biyectiva (Probarlo!) ▨

P11 Sea E un conjunto y $f: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ la función que a todo $X \subseteq E$ le asigna $f(X) = E \setminus X$

(i) Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de f
(ii) Determinar $f \circ f$ y f^{-1} si existen.
(iii) Suponga que $E = \{0, 1, 2\}$. Si $A = \{\{0\}, \{1,2\}\}$ y $B = \{\phi, \{1\}\}$, calcular $f(A)$ y $f^{-1}(B)$ preimagen.

Solución: Notemos que $f(X) = X^c$ con respecto a E.
(i) Inyectividad

$$f(X_1) = f(X_2) \Leftrightarrow X_1^c = X_2^c \quad /()^c$$
$$\Rightarrow X_1 = X_2 \quad \therefore \text{ Es inyectiva.}$$

$$(\forall Y \in \mathcal{P}(E))(\exists X \in \mathcal{P}(E)) \; f(X) = Y$$

Tomando $X = Y^c \Rightarrow f(X) = X^c$
$$= (Y^c)^c = Y.$$

$$X^c = Y \;/()^c$$
$$X = Y^c$$

Luego es epiyectiva (o sobreyectiva)

(ii) $(f \circ f)(X) = f(f(X)) = f(X^c) = (X^c)^c = X$

Ahora como despejamos X en la burbujita tenemos $X = Y^c$ y cambiando X con Y tenemos $Y = X^c \Rightarrow f^{-1}(X) = X^c$ (como f es biyectiva podemos pensar en inversa o sea f^{-1})

(iii) Claramente $A \not\subseteq E$ ($A \notin \mathcal{P}(E)$) por lo que concluimos que ese $f(A)$ no puede ser la función aplicada a A sino que la imagen de A.

$$f(A) = f(\{\{0\}, \{1,2\}\}) = \{f(\{0\}), f(\{1,2\})\}$$
$$= \{\{0\}^c, \{1,2\}^c\} \quad \text{Con respecto a } E!$$
$$= \{\{1,2\}, \{0\}\}$$

$$f^{-1}(B) = \{X \subseteq E \,/\, \underbrace{f(X)}_{X^c} = \phi \;\vee\; \underbrace{f(X)}_{X^c} = \{1\}\}$$

$$\Rightarrow X = \phi^c \;\vee\; X = \{1\}^c = \{\{0,1,2\}, \{0,2\}\}$$

con respecto a E

$\blacksquare$

P12 (i) Considere las funciones $f: \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(n) = \frac{1}{2n}$ y $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tq $g(q) = \frac{q}{2}$

(a) Determine si f, g y $g \circ f$ son inyectivas, epiyectivas y biyectivas.

(b) Determine los conjuntos preimágenes $g^{-1}(\mathbb{Z})$ y $(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z})$ (Control 1, 1997)

(ii) Sea $E = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ es biyectiva} \}$. Es decir, E contiene a todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\psi : E \to E$ tq para cada $f \in E$, $\psi(f) = f^{-1}$, es decir ψ le asocia a cada función en E su inversa.

(a) Probar que ψ es biyectiva.

(b) Sean $f, g \in E$. Probar que $\psi(f \circ g) = \psi(g) \circ \psi(f)$

(Control 1, 1997)

Solución:

(i) (a) Claramente ambas son inyectivas pues

$$\left.\begin{array}{l} f(n_1) = f(n_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2n_1} = \frac{1}{2n_2} \Rightarrow n_1 = n_2 \\ g(q_1) = g(q_2) \Leftrightarrow \frac{q_1}{2} = \frac{q_2}{2} \Rightarrow q_1 = q_2 \end{array}\right\} f \text{ y } g$$

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{4n} \qquad g \circ f : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{Q}$$

y si $(g \circ f)(n_1) = (g \circ f)(n_2) \Leftrightarrow \frac{1}{4n_1} = \frac{1}{4n_2} \Rightarrow n_1 = n_2$

Ahora f no es epiyectiva pues $f(n) \neq -1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ $\left(\frac{1}{2n} \neq -1\right)$ o sea nadie genera al -1 (Por ejemplo)

g si es epiyectiva

$$(\forall q' \in \mathbb{Q})(\exists q \in \mathbb{Q}) \;\; g(q) = q'$$

$\frac{q}{2} = q'$

$q = 2q'$

Basta tomar $q = 2q' \in \mathbb{Q}$ (Pues $q' \in \mathbb{Q}$)

$$y \;\; g(q) = \frac{q}{2} = \frac{2q'}{2} = q'.$$

Por el mismo argumento que se dió para f, $(g \circ f)(n) = \frac{1}{4n}$ no es epiyectiva pues no genera al -1, o sea

$$\frac{1}{4n} \neq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

$$\left(\frac{1}{4n} > 0\right)$$

Finalmente, solo g es inyectiva y epiyectiva a la vez, o sea biyectiva.

(b) $g^{-1}(\mathbb{Z}) = \{ q \in \mathbb{Q} / \underbrace{g(q)}_{\frac{q}{2} = k \text{ con } k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ q = 2k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \} = \{\text{Los enteros pares}\}$

$(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z}) = \{ m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} / \underbrace{(g \circ f)(m)}_{\frac{1}{4m}} \in \mathbb{Z} \} = \phi$

pero $\frac{1}{4m} \notin \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(ii) (a) ψ inyectiva $\quad \psi(f_1) = \psi(f_2) \Leftrightarrow f_1^{-1} = f_2^{-1} \ /(\ )^{-1}$

$\Rightarrow f_1 = f_2$

ψ epiyectiva $\quad (\forall \bar{f} \in E)(\exists f \in E)\ \psi(f) = \bar{f}$

Basta tomar $f = (\bar{f})^{-1}$ y así:

$\psi(f) = \psi((\bar{f})^{-1}) = [(\bar{f})^{-1}]^{-1} = \bar{f}$.

Estas son inversas.

$f^{-1} = \bar{f} \ /(\ )^{-1}$

$f = (\bar{f})^{-1}$

(b) $\psi(f \circ g) = (f \circ g)^{-1}$
$= g^{-1} \circ f^{-1}$
$= \psi(g) \circ \psi(f)$ ▨

Nota: Podemos hablar de f^{-1} para $f \in E$ pues $f \in E \Leftrightarrow f$ biyectiva.

P13 Considere $A = \{1, \dots, m\}$. Sea $B \subseteq A$, $B \neq A$ un subconjunto estricto de A. Se define
$G_B = \{ f : A \to A / f \text{ es biyección y } f(i) = i, \forall i \in B \}$
el conjunto de todas las biyecciones que dejan invariante B.

(i) Probar que $G_B \neq \phi$

(ii) Probar que si $f \in G_B$ y $g \in G_B \Rightarrow g \circ f \in G_B$

(iii) Probar que si $f \in G_B \Rightarrow f^{-1} \in G_B$

Solución:

(i) Claramente sea cual sea B, $f(x) = id_A$ deja invariante todo A ($f(i) = i \ \forall i \in A$), en particular el B escogido.

$$\Rightarrow id_A \in G_B \Rightarrow G_B \neq \phi$$

(ii) $f, g \in G_B \Rightarrow f, g$ biyectivas
$\forall i \in B$ $f(i) = i$ (1)
$g(i) = i$ (2)

Pdq $g \circ f \in G_B$

* $\underbrace{g}_{\text{biyectiva.}} \circ \underbrace{f}_{\text{biyectiva.}}$ biyectiva pues es composición de biyectivas

* $(\forall i \in B)\ (g \circ f)(i) = g(\underbrace{f(i)}_{\substack{i \\ (\text{Por } (1))}}) = \underbrace{g(i) = i}_{\text{Por } (2)}$

(iii) Como f es biyección ($f \in G_B$) tenemos derecho a hablar de inversa.

[Recordar que $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ donde f^{-1} es la función inversa
(si f biyectiva)]

$f \in G_B \Rightarrow f$ biyección $\Rightarrow f^{-1}$ existe y es biyectiva

$$\begin{pmatrix} f(i) = i \\ \forall i \in B \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f^{-1}(i) = i \\ \forall i \in B \end{pmatrix}$$

o sea $f^{-1} \in G_B$ ▨

Pues $i = f(i) \Leftrightarrow f^{-1}(i) = i$

P14 Sea $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función con la propiedad $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ $f(m+n) = f(m) + f(n)$

i) Probar que $f(0) = 0$

ii) Probar que $\forall m \in \mathbb{Z}$, $f(-m) = -f(m)$

iii) Probar que:

$$f \text{ inyectiva} \Leftrightarrow \underbrace{f^{-1}}_{\text{Pre-imagen.}}(\{0\}) = \{0\}$$

Solución:

(i) $f(\cancel{0+}0) = f(\cancel{0}) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

(ii) $\underbrace{f(m + -m)}_{\underbrace{f(0)}_{0}} = f(m) + f(-m) \Rightarrow f(-m) = -f(m)$.

(iii) Notar que $f^{-1}(\{0\}) = \{0\} \Leftrightarrow [x \in f^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow x \in \{0\}]$
$\Leftrightarrow [f(x) \in \{0\} \Leftrightarrow x \in \{0\}]$

$$\Leftrightarrow [f(x)=0 \Leftrightarrow x=0] \Leftrightarrow [(f(x)=0 \Rightarrow x=0) \wedge \underbrace{(x=0 \Rightarrow f(x)=0)}_{V\ (\text{Parte}(i))}]$$

$$\Leftrightarrow [f(x)=0 \Rightarrow x=0]$$

Pdq

$$f \text{ inyectiva} \Leftrightarrow [f(x)=0 \Rightarrow x=0]$$

$(\Rightarrow)$ $f(x)=0=f(0)$ (Parte(i))
$\Rightarrow x=0$ (pues f inyectiva)

$(\Leftarrow)$ Pdq $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

Si $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f(x_1)+-f(x_2)=0$ (Parte (ii))

$f(x_1)+f(-x_2)=0$ Prop. de f

$f(x_1+-x_2)=0$

$\Rightarrow x_1+-x_2=0 \Rightarrow x_1=x_2$ ▨

P15 Sea $f: E \to F$ una función.

(a) Pruebe que $\forall A \subseteq F$, $f^{-1}(A^c)=[f^{-1}(A)]^c$ (Control 1, 1997)

(b) Pruebe que $\forall A,B \subseteq F$ $f^{-1}(A \triangle B)=f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$. (Control 1, 1997)

Solución:

(a) $x \in f^{-1}(A^c) \Leftrightarrow f(x) \in A^c \Leftrightarrow \sim[f(x) \in A]$
$\Leftrightarrow \sim[x \in f^{-1}(A)]$
$\Leftrightarrow x \in [f^{-1}(A)]^c$

(b) $f^{-1}(A \triangle B)=f^{-1}((A\cup B)\setminus(A\cap B))=f^{-1}((A\cup B)\cap(A\cap B)^c)$

$=f^{-1}(A\cup B)\cap f^{-1}((A\cap B)^c)$ Prop. de Pre-imagen.

$=[f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)]\cap[f^{-1}(A\cap B)]^c$ Parte (a)

$=[f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)]\cap[f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)]^c$ Prop. de Pre-imagen

$=[f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)]\setminus[f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)]$

$=f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$ ▨

P16 Sean $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definidas en cada $m \in \mathbb{N}$ por $f(m) = 2m+1$ y $g(m) = m^2+1$

(i) Determinar si f y g son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

(ii) Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$

(iii) Calcular $(g \circ f)(A)$ y $(f \circ g)^{-1}(A)$, donde $A = \{1,2,3,4,5\}$

Solución:

(i) Inyectividad

Sean $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$

$f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow 2m_1+1 = 2m_2+1 \Rightarrow m_1 = m_2$ (f si es inyectiva)

$g(m_1) = g(m_2) \Rightarrow m_1^2+1 = m_2^2+1 \Rightarrow m_1^2 = m_2^2 \Rightarrow m_1 = m_2$ ó $m_1 = -m_2$

como $m_1 \geq 0$ y $m_2 \geq 0$ y $m_1 + m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 0$

Acordemos que $0 \in \mathbb{N}$ o sea $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$

siempre $\Downarrow$

$m_1 = m_2$ (g si es inyectiva (en el dominio dado))

Ninguna es sobreyectiva.

Para f, nadie genera a los pares

Para g, nadie genera al 3 o sea $f(m) \neq 3$ $\forall m \in \mathbb{N}$ (Por ejemplo)

Luego ninguna es biyectiva.

(ii) $f(g(m)) = f(m^2+1) = 2(m^2+1)+1 = 2m^2+3$

$g(f(m)) = g(2m+1) = (2m+1)^2+1 = 4m^2+4m+2$

(iii) $(g \circ f)(A) = (g \circ f)(\{1,2,3,4,5\})$ Usamos esta forma

$= \{(g\circ f)(1), (g \circ f)(2), \dots, (g \circ f)(5)\}$

$= \{10, 26, 50, 82, 122\}$

$(f \circ g)^{-1}(A) = \{m \in \mathbb{N} / (f \circ g)(m) = 2m^2+3 \in A\}$

$= \{ m \in \mathbb{N} \;/\; 2m^2+3=1 \;\vee\; 2m^2+3=2 \;\vee \dots \;\vee\; 2m^2+3=5 \}$

$m=0 \Rightarrow 2m^2+3=3$
$m=1 \Rightarrow 2m^2+3=5$
$m=2 \Rightarrow 2m^2+3=11 \leftarrow$ YA NOS PASAMOS

$=\{0,1\}$

P17 Sean $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ y $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tres funciones definidas en cada $x\in\mathbb{Z}$ como
$f(x)=1-x$
$g(x)=-x-1$
$h(x)=x+2$

(i) Verificar que f, g y h son invertibles.
(ii) Probar que $h\circ g\circ f = g\circ f\circ h = id_{\mathbb{Z}}$
(iii) Deducir de (ii) que $f^{-1}\circ g^{-1} = h$

Solución:
(i) Pdq $\exists f^{-1}, g^{-1}$ y h^{-1}

f: $\begin{array}{l} y=1-x \\ x=1-y \end{array} \Rightarrow y=1-x \Rightarrow f^{-1}(x)=1-x$ y efectivamente $\forall x\in\mathbb{Z}, f^{-1}(x)\in\mathbb{Z}$

CAMBIANDO "x" por "y"

g: $\begin{array}{l} y=-x-1 \\ x=-y-1 \end{array} \Rightarrow y=-x-1 \Rightarrow g^{-1}(x)=-x-1$ y efectivamente $\forall x\in\mathbb{Z}, g^{-1}(x)\in\mathbb{Z}$

h: $\begin{array}{l} y=x+2 \\ x=y-2 \end{array} \Rightarrow y=x-2 \Rightarrow h^{-1}(x)=x-2$ y $\forall x\in\mathbb{Z}, g^{-1}(x)\in\mathbb{Z}$

Luego las tres son invertibles.
Notar que $\mu(x)=2x+1$ $\mu:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ no es invertible pues:

$\begin{array}{l} y=2x+1 \\ x=\frac{y-1}{2} \end{array} \Rightarrow y=\frac{x-1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$

CAMBIANDO "x" por "y"

y por ejemplo $f^{-1}(2)=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$

Ese "2" que acompaña a "x" es crucial ∇ $(2\cdot x)$
Notar que en f, g, h el factor que acompaña a "x" es 1 o -1.

(ii) $(h \circ g \circ f)_{(x)} = h(g(f(x))) = h(g(1-x)) = h(-(1-x)-1)$
$= h(x-2) = x-2+2 = x$

$h \circ g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$

$(g \circ f \circ h)(x) = g(f(h(x))) = g(f(x+2)) = g(1-(x+2))$
$= g(-x-1)$
$= -(-x-1)-1$
$= x$

$g \circ f \circ h = id_{\mathbb{Z}}$

(iii) Claramente $h = (g \circ f)^{-1}$ de lo anterior
$= f^{-1} \circ g^{-1}$ ← recordar que f y g son invertibles. ▨

P18 Sea la función $f : [3,+\infty) \to [2,+\infty)$ tq
$f(x) = x^2 - 6x + 11$ para cada $x \geq 3$
Demostrar que f es biyectiva y determinar f^{-1}.

Solución:
$f(x) = x^2 - 6x + 9 + 2 = (x-3)^2 + 2$

Inyectiva $f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in [3,+\infty)$
$\Rightarrow (x_1-3)^2 + \cancel{2} = (x_2-3)^2 + \cancel{2}$
$\Rightarrow \underbrace{x_1 - 3 = x_2 - 3}_{x_1 = x_2} \quad \vee \quad \underbrace{x_1 - 3 = -(x_2 - 3)}_{x_1 + x_2 = 6}$ pero $x_1, x_2 \geq 3$
$\Rightarrow x_1 = x_2 = 3$

siempre $\Downarrow$
$\Rightarrow x_1 = x_2$ //

Sobreyectiva
$(\forall y \in [2,+\infty))(\exists x \in [3,+\infty))\ f(x) = y$

Tomando $x = 3 + \sqrt{y-2} \in [3,+\infty)$
(La otra solución no es mayor que 3)
↳ En el mejor de los casos es igual a 3 ($y=2$) en cuyo caso ambas soluciones son iguales ($3+\sqrt{y-2} = 3-\sqrt{y-2}$ para $y=2$)

$(x-3)^2+2 = y$
$x-3 = \pm\sqrt{y-2}$
$x = 3 \pm \sqrt{y-2}$
Notar que $y \geq 2$ o sea $y-2 \geq 0$

$\Rightarrow f(x) = (x-3)^2 + 2 = (\sqrt{y-2})^2 + 2 = y-2+2 = y$ //

Como en la burbujita encontramos x en función de y, tenemos que:

$$x = 3 + \sqrt{y-2} \quad \text{(La solución que servía)}$$

Cambiando "x" por "y"

$$y = 3+\sqrt{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = 3+\sqrt{x-2}$$

$$f^{-1}: [2,+\infty) \to [3,+\infty)$$

P19 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \phi$ y $f: A \to \mathbb{R}$ la función tal que
$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - x$, en cada $x \in A$.

(i) Demostrar que si $A \subseteq \mathbb{Q}$, entonces f es inyectiva.
(ii) Si $A = \mathbb{R}$, determinar $f(A)$

Solución:

(i) Si $f(x_1) = f(x_2)$ con [illegible] $x_2 \in \mathbb{Q}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}x_1^2 - x_1$ [illegible] $- x_2$

[illegible] $x_2^2) = x_1 - x_2$

$\mathbb{I}$: Irracionales

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1-x_2)(x_1+x_2) - (x_1-x_2) = 0$$

$$(x_1-x_2)\underbrace{\Big(\underbrace{\tfrac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{(x_1+x_2)}_{\in\mathbb{Q}}}_{\in \mathbb{I}} - 1\Big)}_{\in \mathbb{I} \text{ (Luego no es cero)}} = 0$$

$$\Rightarrow (x_1-x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

(ii) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - x = y$ (Misión: Encontrar los "y" tq $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) = y$)

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - x - y = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Este x existe ssi

$$1+\cancel{4}^{2}y\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \geq 0$$

$$2\sqrt{2}\,y \geq -1$$

$$y \geq \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow f(A) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty\right)$$

Nota: Es encontrar el "recorrido". ∎

P20 (a) Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ funciones.
Probar que:
(a.1) $g \circ f$ sobreyectiva y g inyectiva $\Rightarrow$ f sobreyectiva.
(a.2) $g \circ f$ inyectiva y f sobreyectiva $\Rightarrow$ g inyectiva.
(Control 1, 1999)

(b) Sea $f: \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$ una función definida en cada $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ por $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

(b.1) Demostrar que $f(\mathbb{R}\setminus\{2\}) = \mathbb{R}\setminus\{2\}$
(b.2) Demostrar que f es inyectiva.
(b.3) Se define una nueva función $g: \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}\setminus\{2\}$ tq en cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene $g(x) = f(x)$. Pruebe que g es biyectiva y calcule su inversa.
(Control 1, 1999)

Solución:

(a) (a.1) $g \circ f$ sobreyectiva y g inyectiva

$\Rightarrow$ g sobreyectiva y g inyectiva
$\therefore$ g biyectiva $\Rightarrow$ g^{-1} existe y es biyectiva.

$f = \underbrace{g^{-1}}_{\text{sobreyectiva}} \circ \underbrace{(g \circ f)}_{\text{sobreyectiva}}$ $\Rightarrow$ f sobreyectiva (Es composición de Sobreyectivas)

En particular pues es biyectiva.

(a.2) $g \circ f$ inyectiva y f sobreyectiva

$\Rightarrow$ f inyectiva y f sobreyectiva
$\therefore$ f biyectiva $\Rightarrow$ f^{-1} existe y es biyectiva.

$g = \underbrace{(g \circ f)}_{\text{inyectiva}} \circ \underbrace{f^{-1}}_{\text{en particular inyectiva}}$ $\Rightarrow$ g inyectiva (Es composición de Inyectivas)

$2 \notin f(\mathbb{R}\setminus\{2\})$

(b) (b.1) Pdq $(\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{2\})(\exists x \in \mathbb{R}\setminus\{2\})\ f(x) = y$

Basta tomar $x = \frac{2y+1}{y-2} \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$x \neq 2$ pues si $x = 2 \Rightarrow 2 = \frac{2y+1}{y-2}$
$2y - 4 = 2y + 1$
$(\Rightarrow \Leftarrow)$

$y = \frac{2x+1}{x-2}$
$yx - 2y = 2x + 1$
$x(y-2) = 2y + 1$ $\quad y \neq 2$
$x = \frac{2y+1}{y-2}$

"OJO"

Si $y = 2$ nadie lo genera

y entonces $f(x) = y$ Es devolverse en los pasos. (o simplemente evaluar) (b.2) $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{2x_1+1}{x_1-2} = \dfrac{2x_2+1}{x_2-2}$

$$\Leftrightarrow \cancel{2x_1x_2}-4x_1+x_2-\cancel{2}=\cancel{2x_1x_2}-4x_2+x_1-\cancel{2}$$
$$\Rightarrow 5x_2 = 5x_1$$
$$\Rightarrow \boxed{x_1=x_2} \quad \therefore f \text{ ES INYECTIVA.}$$

(b.3) Por (b.1), $g(\mathbb{R}\setminus\{2\}) = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ (g sobreyectiva)

y si $g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ (g inyectiva)

f inyectiva (b.2)

En la burbujita despejamos x en función de y. Luego $x = \dfrac{2y+1}{y-2}$ y cambiando "x" por "y"

tenemos: $y = \dfrac{2x+1}{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$

Nota: En (b.1), al probar que si
$$y\in\mathbb{R}\setminus\{2\} \Rightarrow (\exists x\in\mathbb{R}\setminus\{2\})\ f(x)=y$$
$$\Updownarrow$$
$$y\in f(\mathbb{R}\setminus\{2\})$$

se probó que $\mathbb{R}\setminus\{2\} \subseteq f(\mathbb{R}\setminus\{2\})$

Ahora, $f(\mathbb{R}\setminus\{2\}) \subseteq \mathbb{R}$ pero notamos que $2 \notin f(\mathbb{R}\setminus\{2\})$

$$\Rightarrow f(\mathbb{R}\setminus\{2\}) \subseteq \mathbb{R}\setminus\{2\}$$
$$\therefore f(\mathbb{R}\setminus\{2\}) = \mathbb{R}\setminus\{2\} \quad ▨$$

P21 Sea $f: A\to B$ una función. Entonces

(a) f inyectiva $\Leftrightarrow (\forall C\neq\phi)(\forall g,h: C\to A)$
$$f\circ g = f\circ h \Rightarrow g=h.$$

(b) f sobreyectiva $\Leftrightarrow (\forall C\neq\phi)(\forall g,h: B\to C)$
$$g\circ f = h\circ f \Rightarrow g=h.$$

Solución:

(a) ($\Rightarrow$) Pdq $(\forall C\neq\phi)(\forall g,h: C\to A)$
$$(f\circ g)_{(x)} = (f\circ h)_{(x)} \Rightarrow g(x)=h(x) \ \forall x\in C$$

Esto es por que $(f\circ g)_{(x)}=(f\circ h)_{(x)} \Leftrightarrow f(g(x))=f(h(x))$
$$\Rightarrow g(x)=h(x)$$
f inyectiva

(⇐) Pdq $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ con $x_1, x_2 \in A$

Tomando $g(x)=x_1$ y $h(x)=x_2$

$$\Rightarrow \text{si } f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \overbrace{f(g(x))=f(h(x))}^{f\circ g=f\circ h}$$

$$\Rightarrow g(x)=h(x)$$

$$\Rightarrow x_1=x_2 \quad \therefore f \text{ inyectiva.}$$

(b)(⇒) Pdq $(g\circ f)(x)=(h\circ f)(x) \Rightarrow g(x)=h(x) \ \forall x\in B$

Si $(g\circ f)(x)=(h\circ f)(x) \Rightarrow g(f(x))=h(f(x))$

$$\Rightarrow (\forall u\in f(A)) \ g(u)=h(u)$$

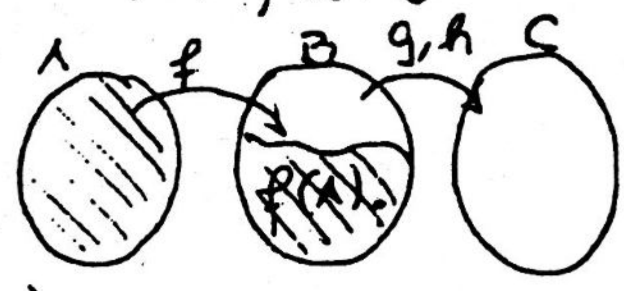
pero $f(A)=B$

$$\Rightarrow (\forall u\in B) \ g(u)=h(u) \Leftrightarrow g=h.$$

(⇐) Tomando "creativamente" $C=\{a,b\}$, $a\neq b$

(1) $g(x)=a \quad \forall x\in B$

(2) $h(x)=\begin{cases} a & x\in f(A) \\ b & x\in B\setminus f(A)\end{cases}$



$(g\circ f)(x)=g(f(x))=a$ (Por (1))

$(h\circ f)(x)=h(f(x))=a$ (Por (2) / pues $f(x)\in f(A)$)

$$\Rightarrow (\forall x\in A) \ (g\circ f)(x)=(h\circ f)(x) \Leftrightarrow g\circ f=h\circ f$$

$$\Rightarrow g=h$$

$$\Leftrightarrow (\forall x\in B) \ \underbrace{g(x)}_{a}=h(x)$$

$$\Rightarrow (\forall x\in B) \ h(x)=a$$

$\therefore f(A)=B$ (Pues h nunca toma el valor b)

$\therefore f$ sobreyectiva.

P22) Sea $f: A\to B$ una función. Entonces f tiene inversa sii existen $g_1, g_2: B\to A$ tales que

$$g_1\circ f = id_A$$

$$f\circ g_2 = id_B$$

Pruebelo¡

Solución:

($\Rightarrow$) Si f tiene inversa, $\exists\, g_1 = g_2 = f^{-1}$ que satisfacen $f^{-1}: B \to A$

$$f^{-1} \circ f = id_A$$
$$f \circ f^{-1} = id_B$$

id_A, id_B ambas biyectivas.

($\Leftarrow$) Si $\exists\, g_1, g_2 : B \to A$ tq.

$$g_1 \circ f = id_A$$

en particular inyectiva

$\therefore f$ necesariamente inyectiva.

y $f \circ g_2 = id_B$ en particular sobreyectiva

$\therefore f$ necesariamente sobreyectiva.

Luego f es biyectiva $\Leftrightarrow$ f tiene inversa.

P23 Sean $A, B \subseteq U$ tales que $A \cap B = \phi$. Sea $f: U \to U$ una función:

(Control 1, 2000)

(i) Probar que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \phi$

(ii) Probar que si f es inyectiva, entonces $f(A) \cap f(B) = \phi$

(iii) Probar que si f es sobreyectiva entonces $f(A) \cup f(A^c) = U$ y que no necesariamente $f(A) \cap f(A^c) = \phi$ (Dé un contraejemplo)

(iv) Probar que $f^{-1}(f(A^c)) = A^c \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = A$

Solución:

(i) $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \underbrace{=}_{\text{La preimagen se porta bien.}} f^{-1}(\underbrace{A \cap B}_{\phi}) = \phi$

(ii) Si f inyectiva $\Rightarrow f(A) \cap f(B) = f(\underbrace{A \cap B}_{\phi})$ (VER P21 c))

$$= f(\phi) = \phi$$

(iii) $f(A) \cup f(A^c) \underbrace{=}_{\text{Propiedad de Imagen}} f(A \cup A^c) = f(U) \underbrace{=}_{\text{pues } f \text{ epiyectiva.}} U$

Demos un contraejemplo:
Sea $U = \mathbb{N}$ y $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$m \to \begin{cases} \frac{m}{2} & \text{si } m \text{ es par} \\ \frac{m+1}{2} & \text{si } m \text{ impar} \end{cases}$$

Sea $A = \{\text{pares}\} \Rightarrow A^c = \{\text{impares}\}$

$f(A) = \mathbb{N}$ $\quad f(A^c) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\therefore f(A) \cap f(A^c) \neq \phi$

y claramente f es epiyectiva (solo con A generamos $\mathbb{N}$)

$\mathbb{N}$: Todo el espacio de llegada.

(iv) Ver (P4| a)). Lo que nos dice el enunciado es que
A^c es estable $\Rightarrow A$ es estable.
Pero si A^c es estable $\Rightarrow \underbrace{(A^c)^c}_{A}$ es estable

(Complemento de estable es estable*)

(Por supuesto que no pueden usarlo en la prueba pero si saben probar (*), sabrán probar lo pedido. ■

P24| Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $T: A \to A$ la función definida por $T(0) = 1$, $T(1) = 2$, $T(2) = 3$ y $T(3) = 0$. Sea

$$I = \{h : A \to \mathbb{R} \;/\; h \text{ es función y } h(0)+h(1)+h(2)+h(3) = 0\}$$

Dada una función $f: A \to \mathbb{R}$ definimos la función $\hat{f}: A \to \mathbb{R}$ en cada $m \in A$ por $\hat{f}(m) = (f \circ T)(m) - f(m)$

(i) Probar que si $f: A \to \mathbb{R}$ una función de dominio A y recorrido $\mathbb{R}$ entonces $\hat{f} \in I$.
Sea $D = \{f : A \to \mathbb{R} \;/\; f \text{ es función y } f(0) = 0\}$
Definimos la función $\Delta: D \to I$ en cada $f \in D$ por $\Delta(f) = \hat{f}$.

(ii) Probar que Δ es biyectiva y calcular Δ^{-1} (esto es, para $h \in I$, escriba $\Delta^{-1}(h)(m)$ en términos de h)

(Control 1, 2000)

Solución:

(i) Pdq $\hat{f} \in I$ o sea $\hat{f}: A \to \mathbb{R}$ satisface

$$\hat{f}(0) + \hat{f}(1) + \hat{f}(2) + \hat{f}(3) = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{f}(0) = f(T(0)) - f(0) = f(1) - f(0) \\ \hat{f}(1) = f(T(1)) - f(1) = f(2) - f(1) \\ \hat{f}(2) = f(T(2)) - f(2) = f(3) - f(2) \\ \hat{f}(3) = f(T(3)) - f(3) = f(0) - f(3) \end{array}\right\} *$$

Si sumamos, $\hat{f}(0) + \hat{f}(1) + \hat{f}(2) + \hat{f}(3) = 0$.

(ii) Sea $h \in I$, encontremos el único f tq $\Delta(f) = h$

o sea $\hat{f} = h$

o sea $\hat{f}(m) = h(m) \quad \forall m \in A$

Como A es finito:

$\hat{f}(0) = h(0)$, $\hat{f}(1) = h(1)$, $\hat{f}(2) = h(2)$, $\hat{f}(3) = h(3)$

Ver(*)

$f(1) - f(0) = h(0)$ (1)

$f(2) - f(1) = h(1)$ (2) Como $f \in D$, $f(0) = 0$

$f(3) - f(2) = h(2)$ (3)

$f(0) - f(3) = h(3)$ (4)

$\left(\begin{array}{l}\text{Nota: } \Delta : D \to I \\ \quad f \to \hat{f} \\ \text{tiene sentido pues en} \\ \text{(i) probamos que } \hat{f} \in I\end{array}\right)$

$\therefore$ $f(1) = h(0)$ (De (1))

$f(2) = f(1) + h(1) = h(0) + h(1)$ (De (2))

De (2)

$f(3) = f(2) + h(2) = h(0) + h(1) + h(2)$ (De (3))

(4) $f(0) - f(3) = 0 - f(3)$

$= -(h(0) + h(1) + h(2))$

$= -(-h(3)) = h(3)$ se satisface directamente.

$$** \left\{ \begin{array}{l} \text{Dada } h \in I \text{, obtuvimos un único } f \in D \text{ tq} \\ \qquad \Delta(f) = h \\ \text{dada por } \quad f(0) = 0 \\ \qquad f(1) = h(0) \\ \qquad f(2) = h(0) + h(1) \\ \qquad f(3) = h(0) + h(1) + h(2) \end{array}\right.$$

Luego Δ es biyectiva.

De (**), $\Delta^{-1}(h) = f$ con

$f : A \to \mathbb{R}$ que cumple (**)

Nota: Aquí es crucial que A sea finito, pues para encontrar f solo debemos obtener $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$

P25 ["Este problema reune a todos los items que involucraban funciones en el Control N°1, año 2001"]

a) Sea $f: E \to F$ una función y $A, B \subseteq F$. Pruebe que:
$$f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A) = \phi \Rightarrow f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A)$$

b) Para $a, b \in \mathbb{R}$ considere la recta $L_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b\}$ y la colección de rectas $\mathcal{L} = \{L_{a,b} \subseteq \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$. Se define el conjunto de pares de rectas no paralelas H como sigue:
$$H = \{(L, L') \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \,/\, L \cap L' \neq \phi,\ L \neq L'\}$$
y la función
$$\varphi: H \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(L, L') \longrightarrow \varphi((L, L')) = (x_0, y_0)$$
, donde (x_0, y_0) es el único punto de intersección de L y L'.

Pruebe que φ es epiyectiva.

c) Sea $F = \{h: E \to E \,/\, h \text{ es biyectiva}\}$ y $f \in F$.

i) Pruebe que $\forall h \in F$, $h \circ f \in F$.

ii) Sea $\varphi_f : F \to F$ tal que $\varphi_f(h) = h \circ f$. Pruebe que φ_f es biyectiva.

Solución:

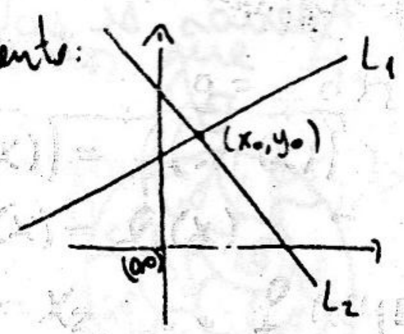
a) Trabajemos nuestra hipótesis, o sea, $f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A) = \phi$.
$$f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A) = \phi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. de} \\ \text{diferencia de conj.}}}{\Longleftrightarrow} f^{-1}(B) \cap (f^{-1}(A))^c = \phi$$
; ahora como buscamos hacer aparecer $f^{-1}(A)$ a la derecha, unamos $f^{-1}(A)$ a ambos lados de la ec. anterior.
$$\Rightarrow (f^{-1}(B) \cap (f^{-1}(A))^c) \cup f^{-1}(A) = \phi \cup f^{-1}(A)$$
$$\Leftrightarrow [(f^{-1}(B) \cup f^{-1}(A)] \cap \underbrace{[(f^{-1}(A))^c \cup f^{-1}(A)]}_{E} = f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(B) \cup f^{-1}(A) = f^{-1}(A)$$
Luego
$$f^{-1}(B) \cup f^{-1}(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propiedad} \\ \text{de preimagen}}}{=} f^{-1}(B \cup A) = f^{-1}(A) \,//$$

b) Notemos que en H "viven" todos los pares de rectas que difieren tanto en pendiente (m) como en coef. de posición (n). Matemáticamente

si $L_1: y = m_1 x + n_1$, $L_2: y = m_2 x + n_2$ entonces $(L_1, L_2) \in H \Leftrightarrow m_1 \neq m_2 \wedge n_1 \neq n_2$

Luego $L_1 \cap L_2 : m_1 x + n_1 = m_2 x + n_2$
$$\Rightarrow x_0 = \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2} \Rightarrow y_0 = m_1 \left(\frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}\right) + n_1$$

Gráficamente: (fig.1)



Así $\varphi(L_1,L_2)=\left(\dfrac{n_2-n_1}{m_1-m_2},\ m_1\left(\dfrac{n_2-n_1}{m_1-m_2}\right)+n_1\right)$

Ahora que entendemos H y φ probemos que φ es epiyectiva. Es decir, dado un punto de $\mathbb{R}^2$, digamos (x_0,y_0), buscamos L y $L' \in H$ tal que $\varphi((L,L'))=(x_0,y_0)$. Vale decir, de las infinitas rectas que pasan por (x_0,y_0) basta que escojamos, por ejemplo:

$L: y=y_0$ (función constante)

$L': y=\dfrac{y_0}{x_0}(x-x_0)+y_0$ (recta que pasa por el origen $(0,0)$ y el punto (x_0,y_0)

Con ello $\varphi((L,L'))=(x_0,y_0)$ $\therefore \varphi$ es epiyectiva. Noten, además, que φ claramente NO es inyectiva.

c) F es un conjunto cuyos elementos son funciones, más específicamente funciones biyectivas de E en E.

i) Sea $h\in F$, probemos $h\circ f\in F$, es decir, que $h\circ f$ es biyectiva de E en E.

En efecto: $h\in F \Rightarrow h:E\to E$, biyectiva

$f\in F \Rightarrow f:E\to E$, biyectiva

$\Rightarrow h\circ f: E\to E$, es biyectiva pues h y f lo son y la composición de funciones biyectivas, es biyectiva. $\therefore h\circ f\in F$

ii) $\varphi_f: F \longrightarrow F$
$h \longrightarrow \varphi_f(h)=h\circ f$

Notemos que φ_f está bien definida, pues $h\circ f\in F$ (lo probamos en i)

φ_f inyectiva: Sean $h_1,h_2\in F$ tales que $\varphi_f(h_1)=\varphi_f(h_2)$ probemos que $h_1=h_2$.

En efecto: $\varphi_f(h_1)=\varphi_f(h_2) \Leftrightarrow h_1\circ f=h_2\circ f \ /\circ f^{-1}$ // existe pues f es biy.

$\Rightarrow (h_1\circ f)\circ f^{-1}=(h_2\circ f)\circ f^{-1}$

$\Leftrightarrow h_1\circ \underbrace{(f\circ f^{-1})}_{id_E}=h_2\circ\underbrace{(f\circ f^{-1})}_{id_E}$ // la comp. es asociativa

$\Leftrightarrow h_1=h_2$

φ_f epiyectiva: Dada $g\in F$ buscamos $\tilde{h}\in F$ tal que $\varphi_f(\tilde{h})=g$.

O sea $\varphi_f(\tilde{h})=g \Leftrightarrow \tilde{h}\circ f=g \ /\circ f^{-1}$

$\Rightarrow \tilde{h}\circ\underbrace{(f\circ f^{-1})}_{id_E}=g\circ f^{-1}$

$\Rightarrow \tilde{h}=g\circ f^{-1}$

Basta tomar $\tilde{h}=g\circ f^{-1}$ y tendremos que $\varphi_f(\tilde{h})=g$ $\therefore \varphi_f$ epi $\therefore \varphi_f$ biy.

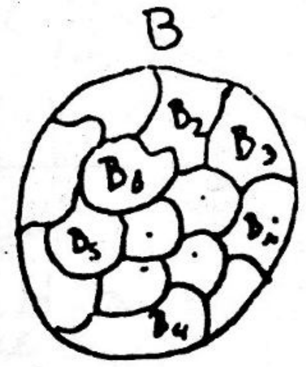
Att. Martín Quinteros.

P26 Sea $f: A \to B$ una función. Sean $B_1, B_2, \ldots, B_n$ subconjuntos de B, es decir, $B_i \subseteq B \ \forall i=1,\ldots,n$. Además se sabe que estos conjuntos satisfacen:

i) $B_i \neq \phi \quad \forall i=1,\ldots,n$

ii) $B_i \cap B_j = \phi \quad \forall i \neq j$

iii) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = B$.



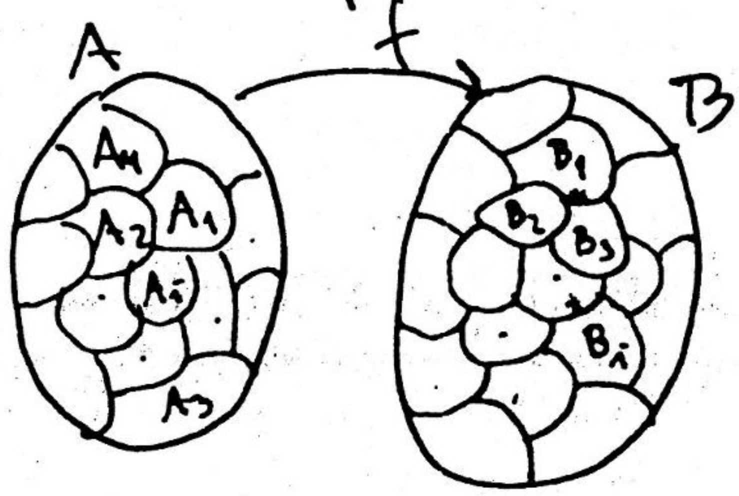
(Nota: Se dice que la familia de conjuntos $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ constituyen una partición de B.)

Probar que si f es una función epiyectiva (sobreyectiva) los subconjuntos A_i de A, generados por $A_i = f^{-1}(B_i)$ satisfacen:

a) $A_i \neq \phi \quad \forall i=1,\ldots,n$

b) $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$

c) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$



Solución:

a) Probemos que $A_i \neq 0 \quad \forall i=1,\ldots,n$.

Sea $B_i \in \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ un subconjunto cualquiera de B.

Luego $B_i \neq \phi$ (por condición i))

$\Rightarrow \exists y \in B_i$ (al menos contiene al elemento y)

$\Rightarrow \exists x \in A \ni y = f(x)$ (pues f es epiyectiva, existe x que "genera" a y a través de la función)

$\Rightarrow f(x) \in B_i$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_i)$ (por definición de pre-imagen)

$\Leftrightarrow x \in A_i$ (por definición (construcción) de A_i)

$\Rightarrow A_i \neq \phi$ (pues al menos contiene al elemento x)

Como el conj. A_i es cualquier subconjunto de A, tenemos que $A_i \neq \phi \quad \forall i=1,\ldots,n$.

b) Probemos que $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$

Supongamos, por argumento de contradicción, que $\exists i \neq j$ tal que $A_i \cap A_j \neq \phi$ e intentemos llegar a una contradicción.

Si $\exists i \neq j \ \ni \ A_i \cap A_j \neq \phi$

$\Rightarrow \exists x_0 \in A_i \cap A_j$ (pues al menos contiene al elemento x_0)

$\Rightarrow (x_0 \in A_i) \wedge (x_0 \in A_j)$

$\Leftrightarrow x_0 \in f^{-1}(B_i) \wedge x_0 \in f^{-1}(B_j)$ (por definición de A_i)

$\Leftrightarrow x_0 \in (f^{-1}(B_i) \cap f^{-1}(B_j))$

$\Leftrightarrow x_0 \in f^{-1}(B_i \cap B_j)$ (propiedad de preimagen)

$\Leftrightarrow f(x_0) \in B_i \cap B_j$ (definición de preimagen)

$\Rightarrow B_i \cap B_j \neq \phi$ (pues al menos contiene al elemento $f(x_0)$!

$\Rightarrow\!\Leftarrow$

Esto es una contradicción pues la propiedad ii) nos dice que $B_i \cap B_j = \phi \quad \forall i \neq j$.

$\therefore \ A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$

c) Probemos que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

En efecto:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(B_n)$$

$$= f^{-1}(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$$

$$= f^{-1}(B) \quad \text{(propiedad iii)}$$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ (pues la preimagen del codominio (recorrido) es igual al dominio para cualquier función.) //

Este hecho es independiente de que la función sea epiyectiva.

Atte Martín Quinteros.

P27 Sea $T: A \to A$ una función.

(i) Probar que
$(\forall a \in A)(\exists m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}),\ T^m(a) = a \Rightarrow T$ inyectiva.

(ii) Suponga que A es finito. Probar que
$$T \text{ inyectiva} \Rightarrow (\forall a \in A)(\exists m \in \mathbb{N}\setminus\{0\})\ T^m(a) = a$$

(iii) De un ejemplo de una función $T: A \to A$ inyectiva pero donde la propiedad (ii) no es cierta (claramente A no es finito)

Solución:

(i) Notar que si $T^m(a) = a$ para $m \in \mathbb{N}$
$$\Rightarrow T^{mm}(a) = \underbrace{T^m(T^m(\ldots T(\underbrace{T^m(a)}_{a}))\ldots)}_{m \text{ veces } T^m}$$
$$= \underbrace{T^m(T^m(\ldots\ T^m(a))\ldots)}_{(m-1) \text{ veces } T^m}$$
$$\vdots$$
$$= T^m(a) = a$$

Luego pdq $T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (T es inyectiva)

Si $T(x_1) = T(x_2)$,
1°) $(\exists m_1 \in \mathbb{N}\setminus\{0\})\, T^{m_1}(x_1) = x_1$
2°) $(\exists m_2 \in \mathbb{N}\setminus\{0\})\, T^{m_2}(x_2) = x_2$

Componiendo T $(m_1m_2 - 1)$ veces más.

3°) $T^{m_1m_2}(x_1) = T^{m_1m_2}(x_2)$
$$\Rightarrow T^{m_2m_1}(x_1) = T^{m_1m_2}(x_2)$$
Pues (*) $T^{m_1}(x_1) = x_1$; Pues (*) $T^{m_2}(x_2) = x_2$
$$x_1 = x_2$$

$\therefore$ f es inyectiva

(*) Ver lo hecho al principio de (i)

(ii) Notar que $\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\, T^m(a) \in A$ y como A finito y los m son infinitos

$$\Rightarrow (\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}\setminus\{0\})\ m_1 \neq m_2,\ m_1 > m_2\quad T^{m_1}(a) = T^{m_2}(a)$$

T^{m_2} es inyectiva, es componer m_2 veces T (que es inyectiva)

$$T^{m_2}(T^{m_1-m_2}(a)) = T^{m_2}(a)$$
$$\Rightarrow T^{m_1-m_2}(a) = a \quad \underbrace{m_1 - m_2}_{\text{Este es el } m \text{ buscado.}} \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

(iii) Ejemplo: $T: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$m \to m+1$

T es claramente inyectiva pero

$$T(a) = a+1 \quad T^2(a) = T(a+1) = a+2$$
$$T^m(a) = a+m$$

y por ende $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$$T^m(a) \neq a$$

P28 Sea $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ con $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ tal que

$$(\forall x, y \in \mathbb{N}^*) \quad f(y \cdot f(x)) = x^2 f(xy) \quad (1)$$

$$\text{y} \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \quad (2)$$

(i) Pruebe que f es inyectiva.

(ii) Pruebe que:
$$f((f(x))^2) = x^2 f(x f(x)) = x^4 f(x^2) = f(f(x^2))$$
Concluir que $[f(x)]^2 = f(x^2)$.

(iii) Concluir que es absurdo que para algun $x \in \mathbb{N}^*$
$$f(x) < x^2 \lor f(x) > x^2$$
Concluir finalmente que $f(x) = x^2 \; \forall x \in \mathbb{N}^*$

(En la Olimpiada no daban la parte (i), (ii) y (iii)) Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.
↳ Yo los he agregado a la solución.

Solución:

(i) Si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 > x_2 \lor x_2 > x_1$ Por (2)
$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \lor f(x_2) > f(x_1)$
$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ Luego f es inyectiva.

(ii) En (1):

Si $y = x$ $\quad f(xf(x)) = x^2 f(x^2)^*$

Si $y = f(x)$ $\quad f(f(x) \cdot f(x)) = f([f(x)]^2) = x^2 f(x f(x)) \overset{\text{Por } (*)}{=} x^4 f(x^2)$

Si $y = 1$ $\quad f(f(x)) = x^2 f(x)^{**}$
$$\Rightarrow f(f(x^2)) = x^4 f(x^2)$$

$$\therefore\ f((f(x))^2) = x^2 f(xf(x)) = x^4 f(x^2) = f(f(x^2))$$

$$\therefore\ f((f(x))^2) = f(f(x^2)) \underset{\substack{\text{pues}\\ f \text{ es}\\ \text{inyectiva.}}}{\Longrightarrow} (f(x))^2 = f(x^2) \quad ***$$

(iii) Si para algún x,

$$f(x) < x^2$$

$$f(f(x)) < f(x^2) \qquad \text{Por (2)}$$

$$\text{Por } (**) \qquad x^2 \cancel{f(x)} < [f(x)]^{\cancel{2}} \qquad \text{Por } (***)$$

Recordar que $f(x)>0$

$$x^2 < f(x) \quad (\Rightarrow\!\Leftarrow)$$

Analogamente, si

$$f(x) > x^2 \qquad \text{(Para algún } x\text{)}$$

$$f(f(x)) > f(x^2)$$

$$x^2 \cancel{f(x)} > [f(x)]^{\cancel{2}}$$

$$x^2 < f(x)$$

$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}^*)\ f(x) = x^2$ pues para ningun x puede ocurrir que $f(x) < x^2$ ó $f(x) > x^2$

P29 | Sea $f: A \to B$ una función $(A \neq \phi)$
Sea $\{A_i\}_{i=1}^m$ una partición de A, o sea, es una colección de subconjuntos de A tal que:

(i) $A_i \neq \phi \quad \forall i \in \{1, 2, .., m\}$ (iii) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$
(ii) $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \phi$

Si definimos $B_i = f(A_i)$, $i = 1, 2, ..., m$
Probar que $(\forall \{A_i\}_{i=1}^m$ partición de $A)$ $\{B_i\}_{i=1}^m$ es una partición de $f(A)$ sii f es inyectiva.

Nota: $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_m$

$\{A_i\}_{i=1}^m$ se refiere a la familia de los A_i o sea $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m\}$

Solución:

$(\Leftarrow)$ Pdq i) $B_i \neq \phi_m$ ii) $\forall i \neq j \quad B_i \cap B_j = \phi$
iii) $\bigcup_{i=1}^{m} B_i = B$

i) Como $A_i \neq \phi$, $\exists x \in A_i \Rightarrow f(x) \in f(A_i) = B_i$
$\Rightarrow B_i \neq \phi$ (Pues tiene a lo menos a $f(x)$)

ii) $\forall i \neq j \quad B_i \cap B_j = f(A_i) \cap f(A_j)$
$= f(A_i \cap A_j)$ pues f inyectiva (Ver P2 (a))
$= f(\phi) = \phi$

iii) $\bigcup_{i=1}^{m} B_i = \bigcup_{i=1}^{m} f(A_i) = f\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = f(A)$
propiedad de la imagen

Luego $\{B_i\}_{i=1}^{m}$ es una partición de $f(A)$

$(\Rightarrow)$ Si $\#A = 1$, f es directamente inyectiva.
nº de elementos

Si $\#A \geq 2$ tomemos la partición en A $\begin{cases} A_1 = \{x_1\} \\ A_2 = A_1^c \end{cases}$ $\neq \phi$ pues $\#A \geq 2$

Pdq $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
Como $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_2 \in A_1^c = A_2$
$\Rightarrow f(x_2) \in f(A_2) = B_2$

Notemos que $\underbrace{f(A_1)}_{B_1} = \{f(x_1)\}$ y que $\underbrace{B_1 \cap B_2 = \phi}_{\text{pues es partición}}$

Luego $f(x_2) \in B_2 \Rightarrow f(x_2) \notin B_1 = \{f(x_1)\}$
$\therefore f(x_2) \neq f(x_1)$ ▨ $\{B_1, B_2\}$ es partición.

Quiero dedicar esta Guía a la mas grandiosa Sección de Primer Año: "La Sección 05", pues además de tener grandes talentos "estudiantiles" tiene gran calidad humana. Muchas gracias muchachos por confiar en mi, por su perseverancia, por su esfuerzo... realmente me siento orgulloso de ser su Auxiliar... a quien más que profesor pueden considerar su AMIGO de estudio.

David

PD: Para consultas o citas con mechonas (es broma) escriban a dpainequ@yahoo.com