5. Semana 4

P1 Primero vamos a obtener $f(x)$, claramente $f^{-1}(x)$ es biyectiva al ser lineal, luego

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= \frac{y-2}{3} \\ 3x &= y-2 \\ 3x+2 &= y \\ f(x) &= 3x+2 \end{aligned}$$

Si observamos $g(f(x))$ se tiene que

$$g(f(x)) = \frac{3x+2}{9x^2+12x+5} = \frac{3x+2}{(3x+2)^2+1} = \frac{f(x)}{f(x)^2+1}$$

Finalmente $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ y $f(x) = 3x+2$.

P2 **(a)** $\Rightarrow$ Como f es inyectiva y g es biyectiva, en particular es inyectiva, luego $f \circ g$ es inyectiva por ser composición de funciones inyectivas.

$\Leftarrow$ Sean $x_1, x_2 \in A$, tales que $f(x_1) = f(x_2)$, debemos demostrar que $x_1 = x_2$, en efecto, como g es biyectiva, en particular es sobreyectiva, por lo tanto, existen y_1, y_2 tales que $g(y_1) = x_1$ y $g(y_2) = x_2$ dicho esto se tiene que

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ f(g(y_1)) &= f(g(y_2)) \\ y_1 &= y_2 && \backslash\text{esto último por hipótesis ya que } f\circ g \text{ es inyectiva} \\ g(y_1) &= g(y_2) && \backslash\text{aplicando } g \text{ a ambos lados} \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ Como f es sobreyectiva y g es biyectiva, en particular es sobreyectiva, luego $g \circ f$ es sobreyectiva por ser composición de funciones sobreyectivas.

$\Leftarrow$ Dado un $y \in A$ debemos encontrar un $x \in A$ tal que $f(x) = y$, como g es biyectiva, posee inversa, que también es biyectiva, en particular, sobreyectiva, luego ese $y \in A$, puede ser representado como $g^{-1}(z) = y$. Como $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces para todo $z \in A$, existe un $x \in A$ tal que

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= z && \backslash\text{aplicando } g^{-1} \text{ a ambos lados} \\ g^{-1}(g(f(x))) &= g^{-1}(z) \\ f(x) &= y \end{aligned}$$

P3 **(a)** Para demostrar que $\overline{f} \in I$ entonces se debe cumplir que $\overline{f}(0) + \overline{f}(1) + \overline{f}(2) + \overline{f}(3) = 0$, en efecto

$$\begin{aligned} \overline{f}(0)+\overline{f}(1)+\overline{f}(2)+\overline{f}(3)) &= \\ f\circ T(0)-f(0)+f\circ T(1)-f(1)+f\circ T(2)-f(2)+f\circ T(3)-f(3) &= \\ f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+f(3)-f(2)+f(0)-f(3) &= 0 \end{aligned}$$

(b) En vez de probar inyectividad y sobreyectividad, lo mejor es encontrar la inversa de forma explícita, con eso se tiene de forma automática la biyectividad. Hay que encontrar entonces una función $\triangle^{-1} : I \to D$ tal que $\triangle^{-1} \circ \triangle(f) = f$, notar además que f no es explícita y por tanto $\triangle^{-1}$ debe definirse para cada valor de f en A. Se propone entonces la siguiente función $\triangle^{-1}$:

$$\triangle^{-1} = \begin{cases} \triangle^{-1}(f)(0) = & f(0)+f(1)+f(2)+f(3) \\ \triangle^{-1}(f)(1) = & -f(1)-f(2)-f(3) \\ \triangle^{-1}(f)(2) = & -f(2)-f(3) \\ \triangle^{-1}(f)(3) = & -f(3) \end{cases}$$

Notar que si $f \in I$, luego $\triangle^{-1}(f)(0) = 0$, con lo que $\triangle^{-1}(f) \in D$. Falta comprobar que efectivamente $\triangle^{-1} \circ \triangle(f) = f$, para cada valor de f en A.

$$\triangle^{-1}\circ\triangle(f) = \begin{cases} \triangle^{-1}\circ\triangle(f)(0) = \triangle^{-1}(\overline{f})(0) = & \overline{f}(0)+\overline{f}(1)+\overline{f}(2)+\overline{f}(3) = 0 = f(0) \\ \triangle^{-1}\circ\triangle(f)(1) = \triangle^{-1}(\overline{f})(1) = & -\overline{f}(1)-\overline{f}(2)-\overline{f}(3) = \overline{f}(0) = f(1) \\ \triangle^{-1}\circ\triangle(f)(2) = \triangle^{-1}(\overline{f})(2) = & -\overline{f}(2)-\overline{f}(3) = f(2) \\ \triangle^{-1}\circ\triangle(f)(3) = \triangle^{-1}(\overline{f})(3) = & -\overline{f}(3) = f(3) \end{cases}$$

De manera análoga se prueba que $\triangle \circ \triangle^{-1}(\overline{f}) = \overline{f}$

$$\triangle\circ\triangle^{-1}(\overline{f}) = \begin{cases} \triangle\circ\triangle^{-1}(\overline{f})(0) = \triangle(f)(0) = & \overline{f}(0) \\ \triangle\circ\triangle^{-1}(\overline{f})(1) = \triangle(f)(1) = & \overline{f}(1) \\ \triangle\circ\triangle^{-1}(\overline{f})(2) = \triangle(f)(2) = & \overline{f}(2) \\ \triangle\circ\triangle^{-1}(\overline{f})(3) = \triangle(f)(3) = & \overline{f}(3) \end{cases}$$

Lo más complicado del problema era construir la función inversa, para darse una idea de cómo llegar a ella era importante notar que necesitábamos una función tal que $\triangle^{-1}(\overline{f}) = f$, si tomamos por ejemplo $f(1)$, debemos expresarlo en funcón de $\overline{f}$, luego se sabe que $f(0) = 0$ y que $\overline{f}(0)+\overline{f}(1)+\overline{f}(2)+\overline{f}(3) = 0 \Leftrightarrow f(T(0)) - f(0) + \overline{f}(1)+\overline{f}(2)+\overline{f}(3) = 0 \Leftrightarrow f(1) = -(\overline{f}(1)+\overline{f}(2)+\overline{f}(3))$. Esto nos indica entonces que $\triangle^{-1}(f)(1) = -f(1)-f(2)-f(3)$. Se hace un procedimiento similar para el resto de los valores.

P4 **(a)** Como $h, f \in \mathcal{F}$ son biyectivas, luego $h \circ f \in \mathcal{F}$ ya que la composición de funciones biyectivas es biyectiva.

(b) - Inyectiva: Sean $h_1, h_2 \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\varphi_f(h_1) &= \varphi_f(h_2) \\
h_1 \circ f &= h_2 \circ f \qquad \text{\aplicando } f^{-1} \text{ ya que es biyectiva y posee inversa} \\
h_1 \circ (f \circ f^{-1}) &= h_2 \circ (f \circ f^{-1}) \\
h_1 \circ id_{\mathcal{F}} &= h_2 \circ id_{\mathcal{F}} \\
h_1 &= h_2
\end{aligned}
$$

- Sobreyectiva: Para todo $g \in \mathcal{F}$ existe una función $h \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi_f(h) = g$. en efecto basta tomar $h = g \circ f^{-1}$, con esto se tiene que

$$
\begin{aligned}
\varphi_f(h) &= (g \circ f^{-1}) \circ f \\
\varphi_f(h) &= g \circ (f^{-1} \circ f) \\
\varphi_f(h) &= g \circ id_{\mathcal{F}} \\
\varphi_f(h) &= g
\end{aligned}
$$

P5 $\xi(f \circ g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = \xi(g) \circ \xi(f)$. Recordar que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ es una propiedad de la inversa de composición de funciones.

P6 Por definición de conjunto preimagen

$$g^{-1}(\mathbb{Z}) = \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \frac{x}{2} \in \mathbb{Z} \right\} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

$$(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z}) = \left\{ x \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \;\middle|\; \frac{1}{4x} \in \mathbb{Z} \right\} = \emptyset$$

P7 Sea $y \in f(A) \backslash f(B)$ esto significa por definición que

$$
\begin{aligned}
& y \in f(A) \backslash f(B) \\
\Leftrightarrow\; & y \in (f(A) \cap f(B)^c) \\
\Leftrightarrow\; & y \in f(A) \wedge y \in f(B)^c \\
\Leftrightarrow\; & (\exists x \in A)(f(x) = y) \wedge (\forall x \in B)(f(x) \neq y)
\end{aligned}
$$

Esto último quiere decir que $(\exists x \in A \backslash B)(f(x) = y)$ ya que si x estuviera en B contradice que $(\forall x \in B)(f(x) \neq y)$. Con lo anterior se deduce que $y \in f(A \backslash B)$ y con esto $y \in f(A) \backslash f(B) \Rightarrow y \in f(A \backslash B)$, $f(A) \backslash f(B) \subseteq f(A \backslash B)$, de manera análoga $f(B) \backslash f(A) \subseteq f(B \backslash A)$, finalmente uniendo ambas expresiones y recordando que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
f(A) \backslash f(B) \cup f(B) \backslash f(A) &\subseteq f(A \backslash B) \cup f(B \backslash A) \\
f(A) \triangle f(B) &\subseteq f((A \backslash B) \cup (B \backslash A)) \\
f(A) \triangle f(B) &\subseteq f(A \triangle B)
\end{aligned}
$$

Si es inyectiva, bastaría probar que $f(A\backslash B) \subseteq f(A)\backslash f(B)$, en efecto, sea $y \in f(A\backslash B)$ entonces existe un x en $A\backslash B$ tal que $f(x) = y$, por tanto, $y \in f(A)$, no puede haber otro $\overline{x} \in B$ tal que $f(\overline{x}) = y$ ya que de ser así no sería inyectivo, luego $y \notin f(B)$ y se concluye que $y \in f(A\backslash B) \Rightarrow y \in f(A)\backslash f(B)$, $f(A\backslash B) \subseteq f(A)\backslash f(B)$ de manera análoga $f(B\backslash A) \subseteq f(B)\backslash f(A)$. Dicho esto, se tiene $f(A\backslash B) \subseteq f(A)\backslash f(B)$ y $f(B\backslash A) \subseteq f(B)\backslash f(A)$, uniendo ambas expresiones se tiene que

$$\begin{aligned} f(A\backslash B) \cup f(B\backslash A) \subseteq f(A)\backslash f(B) \cup f(B)\backslash f(A) \\ f((A\backslash B) \cup (B\backslash A)) \subseteq f(A) \triangle f(B) \\ f(A \triangle B) \subseteq f(A) \triangle f(B) \end{aligned}$$

Con esto y usando la parte anterior se tiene que $f(A) \triangle f(B) = f(A \triangle B)$.

P8 Recordando que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

$$\begin{aligned} f(B)\backslash f(A) &= \emptyset \\ f(B) \cap f(A)^c &= \emptyset \qquad \backslash \cup f(A) \\ (f(B) \cup f(A)) \cap (f(A)^c \cup f(A)) &= \emptyset \cup f(A) \\ (f(B) \cup f(A)) \cap U &= f(A) \\ f(B) \cup f(A) &= f(A) \\ f(B \cup A) &= f(A) \end{aligned}$$