PAUTA GUÍA DE PROBLEMAS SEMANA 4

Auxiliar: Mario Escobar Santoro

P1] Sean $f,g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones. Determine explícitamente f y g sabiendo que:

$$(g\circ f)(x) = \frac{3x+2}{9x^2+12x+5} \quad , \quad f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$$

Solución:

Busquemos $f(x)$:

si $y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \underset{\uparrow}{=} x$

podemos hacer esto porque sabemos que la inversa existe

luego, en $f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3} \Rightarrow x = \frac{f(x)-2}{3}$

$$\Rightarrow f(x) = 3x+2.$$

Veamos ahora $g(x)$:

Tenemos que $(g\circ f)(f^{-1}(x)) = (g\circ f\circ f^{-1})(x) = (g\circ id)(x) = g(x)$

luego $g(x) = (g\circ f)(f^{-1}(x)) = \dfrac{3(f^{-1}(x))+2}{9(f^{-1}(x))^2+12f^{-1}(x)+5}$

$$= \frac{3\left(\frac{x-2}{3}\right)+2}{9\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+12\left(\frac{x-2}{3}\right)+5}$$

$$= \frac{x-2+2}{(x-2)^2+4(x-2)+5} = \frac{x}{x^2-4x+4+4x-8+5}$$

$$g(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

//

P2 Sean $f, g: A \longrightarrow A$ funciones. Probar que si g es biyectiva entonces se tiene que:

(a) f es inyectiva ssi $f \circ g$ es inyectiva

(b) f es sobreyectiva ssi $g \circ f$ es sobreyectiva

Solución:

(a) ($\Rightarrow$) Propiedad vista en clase.

Probémoslo en todo caso:

Debemos probar que

f es inyectiva y g es biyectiva $\Rightarrow$ $f \circ g$ es inyectiva

Tenemos que

$\forall x_1, x_2 \in A$ $\quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ $\quad \wedge$ (pues f es inyectiva)

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (pues g es inyectiva)

Debemos probar que

$\forall x_1, x_2 \in A \quad (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Sean $x_1, x_2 \in A$, con

$$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Leftrightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2))$$

$$\underset{\text{pues } f \text{ es inyectiva}}{\Rightarrow} g(x_1) = g(x_2)$$

$$\underset{\text{pues } g \text{ es inyectiva}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

Luego, $f \circ g$ es inyectiva.

($\Leftarrow$) Veamos que si $f \circ g$ es inyectiva y g es biyectiva $\Rightarrow$ f es inyectiva

Sabemos que si h es inyectiva, teniendo que $f \circ g$ inyectiva se tiene que $f \circ g \circ h$ es inyectiva.

Tomando $h = g^{-1}$, como g es biyectiva, g^{-1} también lo es, luego g^{-1} es inyectiva. (Podemos tomar $h = g^{-1}$)

Luego $f \circ g \circ g^{-1}$ es inyectiva

$\Rightarrow f \circ id = f$ es inyectiva.

(b) ($\Rightarrow$) Tenemos que f y g son sobreyectivas.

Es decir,

$\forall y_1 \in A$, $\exists x_1 \in A$ tal que $f(x_1) = y_1$

$\forall y_2 \in A$, $\exists x_2 \in A$ tal que $g(x_2) = y_2$

Debemos probar que

$\forall y \in A$ $\exists x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$

Sea $y \in A$ cualquiera.

luego $\exists \bar{x} \in A$ tal que $g(\bar{x}) = y$ (pues g es sobreyectiva)

y como $\bar{x} \in A$, $\exists x \in A$ tal que $f(x) = \bar{x}$ (pues f es sobreyectiva)

Así, $\forall y \in A$, $\exists x \in A$ tal que $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = y$

($\Leftarrow$) sabemos que la composición de fns es sobreyectiva.

luego, como g^{-1} existe y es sobreyectiva

$g^{-1} \circ (g \circ f)$ es sobreyectiva, es decir

f es sobreyectiva //

P3) $A = \{0,1,2,3\}$ $T: A \to A$ definida por $T(0) = 1$, $T(1) = 2$, $T(2) = 3$, $T(3) = 0$

$I = \{h: A \to \mathbb{R}$ / h es función y $h(0) + h(1) + h(2) + h(3) = 0\}$

Dada $f: A \to \mathbb{R}$ definimos $\bar{f}: A \to \mathbb{R}$ $\forall n \in A$ por $\bar{f}(n) = f \circ T(n) - f(n)$.

(a) Pruebe que si $f: A \to \mathbb{R}$ es una fn. de dominio A y recorrido $\mathbb{R}$ entonces $\bar{f} \in I$

(b) Sea $D = \{h: A \to \mathbb{R}$ / h es fn. y $h(0) = 0\}$. Definimos $\Delta: D \to I$ en cada $f \in D$ por $\Delta(\bar{f}) = f$. Probar que Δ es biyectiva y calcular Δ^{-1}

Solución:

(a) Para ver que $\bar{f} \in I$, tenemos que ver que $\bar{f}$ es función y $\bar{f}(0) + \bar{f}(1) + \bar{f}(2) + \bar{f}(3) = 0$.

Por la definición de $\bar{f}$, se tiene que $\bar{f}$ es función.

Además, $\bar{f}(0) = f(T(0)) - f(0) = f(1) - f(0)$

$\bar{f}(1) = f(T(1)) - f(1) = f(2) - f(1)$

$\bar{f}(2) = f(T(2)) - f(2) = f(3) - f(2)$

$\bar{f}(3) = f(T(3)) - f(3) = f(0) - f(3)$

y se tiene claramente que $\bar{f}(0) + \bar{f}(1) + \bar{f}(2) + \bar{f}(3) = 0$

Luego, $\bar{f} \in I$.

(b) · <u>Sobreyectividad</u>: Sea $g \in I$, luego, $g(0) + g(1) + g(2) + g(3) = 0$

debemos probar que $\exists f \in D$ tal que $\Delta(f) = g$

es decir, $f \circ T(n) - f(n) = g(n) \quad \forall n \in A$

Esta f debe cumplir que $f(0) = 0$ pues $f \in D$.

·) $f \circ T(0) - \underbrace{f(0)}_{0} = g(0) \Rightarrow f(1) = g(0)$

·) $f \circ T(1) - f(1) = g(1) \Rightarrow f(2) - f(1) = g(1)$

$\Rightarrow f(2) = g(1) + f(1) = g(1) + g(0)$

·) $f \circ T(2) - f(2) = g(2) \Rightarrow f(3) - f(2) = g(2)$

$\Rightarrow f(3) = g(2) + f(2) = g(2) + g(1) + g(0)$

Luego, definiendo $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$f(0) = 0, \quad f(1) = g(0), \quad f(2) = g(1) + g(0), \quad f(3) = g(2) + g(1) + g(0),$

se tiene que $\Delta(f) = g$, es decir, $f \circ T(n) - f(n) = g(n) \quad \forall n \in A$.

Luego, Δ es sobreyectiva (para $g \in I$, encontramos $f \in D$ tal que $\Delta(f) = g$).

· <u>Inyectividad</u>

Sean $f_1, f_2 \in D$ tal que $\Delta(f_1) = \Delta(f_2)$

veamos que $f_1 = f_2$, es decir, $f_1(n) = f_2(n) \quad \forall n \in A$.

Ya que $\Delta(f_1) = \Delta(f_2) \Rightarrow f_1 \circ T(n) - f_1(n) = f_2 \circ T(n) - f_2(n) \quad \forall n \in A$

y como $f_1, f_2 \in D \Rightarrow f_1(0) = f_2(0)$

Luego, .) $f_1 \circ T(0) - \underbrace{f_1(0)}_{0} = f_2 \circ T(0) - \underbrace{f_2(0)}_{0}$

$\Rightarrow \quad f_1 \circ T(0) = f_2 \circ T(0) \quad \Rightarrow \quad f_1(1) = f_2(1)$

.) $f_1 \circ T(1) - \cancel{f_1(1)} = f_2 \circ T(1) - \cancel{f_2(1)}$ (pues $f_1(1) = f_2(1)$)

$\Rightarrow \quad f_1(T(1)) = f_2(T(1)) \quad \Rightarrow \quad f_1(2) = f_2(2)$

.) $f_1 \circ T(2) - \cancel{f_1(2)} = f_2 \circ T(2) - \cancel{f_2(2)}$

$\Rightarrow \quad f_1 \circ T(2) = f_2(T(2)) \quad \Rightarrow \quad f_1(3) = f_2(3)$

Probamos así que $f_1(n) = f_2(n) \quad \forall n \in \mathbb{A}$

Luego, Δ es inyectiva.

. Inversa: Dada $g \in I$ queremos encontrar $\Delta^{-1}(g)$, es decir, una función f tal que $\Delta(f) = g$.
Cuando se vió sobreyectividad se encontró que

$f(0) = 0$
$f(1) = g(0)$
$f(2) = g(1) + g(0)$
$f(3) = g(2) + g(1) + g(0)$

Luego, esta f definida anteriormente satisface $\Delta(f) = g$

Luego, $\Delta^{-1}(g) = f$. //

P4 Sea $\mathcal{F} = \{h : E \to E \,/\, h \text{ es biyectiva}\}$ y $f \in \mathcal{F}$

(a) Pruebe que para todo $h \in \mathcal{F}$, $h \circ f \in \mathcal{F}$

(b) Sea $\varphi_f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $\varphi_f(h) = h \circ f$. Pruebe que φ_f es biyección

<u>Solución:</u>

(a) Como $h, f \in \mathcal{F} \Rightarrow h, f : E \to E$ y h, f son biyectivas

luego, como sabemos que la composición de funciones biyectivas es biyectiva

se tiene que $h \circ f$ es biyección, además

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "h \circ f"'] & E \arrow[r, "h"'] & E \end{tikzcd} \Rightarrow h \circ f : E \to E$$

Así, $h \circ f \in \mathcal{F}$.

(b) · <u>Inyectividad</u>: sean h_1 y $h_2 \in \mathcal{F}$ tq $\varphi_f(h_1) = \varphi_f(h_2)$

$\Rightarrow h_1 \circ f = h_2 \circ f$, y como f es biyectiva

f^{-1} existe, luego

$$h_1 \circ f \circ f^{-1} = h_2 \circ f \circ f^{-1} \Rightarrow h_1 \circ id = h_2 \circ id$$
$$\Rightarrow h_1 = h_2$$

· <u>Sobreyectividad</u>: Sea $g \in \mathcal{F}$, debemos probar que $\exists h \in \mathcal{F}$

tal que $\varphi_f(h) = g$, es decir, $h \circ f = g$

Tomando $h = g \circ f^{-1}$ que es biyectiva y $h : E \to E$

es decir, $g \circ f^{-1} \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \varphi_f(h) = \varphi_f(g \circ f^{-1}) = (g \circ f^{-1}) \circ f = g \circ (f \circ f^{-1})$$
$$= g \circ id = g$$

Así, dado $g \in \mathcal{F}$, $\exists h = g \circ f^{-1} \in \mathcal{F}$ tq $\varphi_f(h) = g$

//

P5] $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f$ es biyectiva$\}$. Se define $\xi : E \to E$

tq $f \in E$, $\xi(f) = f^{-1}$. Sean $f, g \in E$.

Probar que $\xi(f \circ g) = \xi(g) \circ \xi(f)$

<u>Solución</u>

Debemos probar que $\xi(f \circ g) = \xi(g) \circ \xi(f)$

es decir, $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

lo que es cierto por propiedad vista en clases (Proposición 3.4)

//

P6] Considere las funciones $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ definida en cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ por $f(n) = \frac{1}{2n}$ y $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida en cada $q \in \mathbb{Q}$ por $g(q) = \frac{q}{2}$. Determine los conjuntos preimágenes $g^{-1}(\mathbb{Z})$ y $(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z})$

<u>Solución:</u>

Para encontrar $g^{-1}(\mathbb{Z}) = \{q \in \mathbb{Q} \mid g(q) \in \mathbb{Z}\}$

es decir, son los elementos en $\mathbb{Q}$ cuya imagen via g es entera.

Veamos que este conjunto son los enteros multiplicados por 2, es decir,

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid g(q) \in \mathbb{Z}\} = \{2p \in \mathbb{Z} \mid p \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$

Llamemos $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid g(q) \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{2p \in \mathbb{Z} \mid p \in \mathbb{Z}\}$

Veamos que $A = B$.

En efecto, sea $r \in A \iff r \in \mathbb{Q}$ tq $g(r) = \frac{r}{2} \in \mathbb{Z}$

si $\frac{r}{2} \in \mathbb{Z}$, r tiene la forma $r = 2p$, $\frac{r}{2} = \frac{2p}{2} = p \in \mathbb{Z}$

luego $r \in A \iff p \in \mathbb{Z}$, $r = 2p \iff r \in B$.

Veamos ahora $(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathbb{Z}))$

$$(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z}) = f^{-1}(\{2p \in \mathbb{Z} \mid p \in \mathbb{Z}\})$$

Dado que no existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tq $f(n) = \frac{1}{2n} \in \mathbb{Z}$

se tiene que $f^{-1}(\{2p \in \mathbb{Z} \mid p \in \mathbb{Z}\}) = \phi$

luego $(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z}) = \phi$.