PAUTA AUXILIAR 4

P1 a) P.D.Q $(\forall A,B \subseteq E)\ f(A)\setminus f(B) \subseteq f(A\setminus B)$

Sea $y \in f(A)\setminus f(B)$ con $A,B \subseteq E$ arbitrarios

$\iff y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$

$\iff \exists x_0 \in A ; f(x_0)=y \wedge \nexists x_1 \in B : f(x_1)=y$

$\iff \exists x_0 \in A : f(x_0)=y \wedge \forall x_1 \in B : f(x_1) \neq y$

$\Rightarrow x_0 \in A \wedge x_0 \notin B$ (porque si $x_0 \in B$ entonces $f(x_0) \neq y$)

$\iff x_0 \in A\setminus B$

$\Rightarrow \exists x_0 \in A\setminus B : f(x_0)=y$

$\iff y \in f(A\setminus B)$

b) como ya demostramos que $(\forall A,B \subseteq E)\ f(A)\setminus f(B) \subseteq f(A\setminus B)$,

solo tenemos que demostrar que

$[(\forall A,B \subseteq E)\ f(A\setminus B) \subseteq f(A)\setminus f(B)] \iff f$ es inyectiva

$\Leftarrow$ Hipótesis: f inyectiva. P.D.Q $(\forall A,B \subseteq E)\ f(A\setminus B) \subseteq f(A)\setminus f(B)$.

Sea $y \in f(A\setminus B)$.

$\iff \exists x_0 \in A\setminus B : f(x_0)=y$

$\Rightarrow \exists x_0 \in A\ f(x_0)=y$ $(A\setminus B \subseteq A)$

$\iff y \in f(A)$ ☆

Ahora solo falta ver que $y \notin f(B)$.

Por contradicción, digamos que $y \in f(B)$

$\iff \exists x_1 \in B : f(x_1) = y$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_0) = y$

$\Rightarrow x_1 = x_0$ (porque f es inyectiva)

$\rightarrow\!|\!\leftarrow$

porque $x_1 \in B$ y $\underbrace{x_0 \in A \setminus B}_{\Rightarrow x_0 \notin B}$!

$\therefore y \notin f(B)$

Ahora, si volvemos atrás, por ☆ teníamos que $y \in f(A)$

Entonces $y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$

$\iff y \in f(A) \setminus f(B)$

$\therefore f$ inyectiva $\Rightarrow (\forall A, B \subseteq E)\ f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$.

$\Rightarrow)$ Hipótesis: $f(A)\setminus f(B) \subseteq f(A\setminus B) \quad \forall A,B \subseteq E.$

P.D.Q: f es inyectiva $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2) \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Sea $A = \{x_1\}$, $B = \{x_2\}$ $\quad x_1 \neq x_2.$

En efecto: $f(A)\setminus f(B) = f(\{x_1\})\setminus f(\{x_2\}) \overset{\text{por Hipótesis}}{=} f(\{x_1\}\setminus\{x_2\})$

Pero como $x_2 \neq x_1$, $\quad \{x_1\}\setminus\{x_2\} = \{x_1\}$

$\Rightarrow f(\{x_1\})\setminus f(\{x_2\}) = f(\{x_1\})$

$\Rightarrow f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \emptyset$

$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\therefore f(A)\setminus f(B) \subseteq f(A\setminus B) \ \forall A,B \subseteq E \Rightarrow f$ es inyectiva

ya que demostramos la parte (a) y ambas implicancias, podemos concluir que

$(\forall A,B \subseteq E)$

$$f(A)\setminus f(B) = f(A\setminus B) \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva}$$

c) P.D.Q $(\forall Y \subseteq F) \quad f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

Sea $y \in f(f^{-1}(Y))$

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(Y) : f(x_0) = y$

$\Leftrightarrow \exists w \in Y : f(x_0) = w \quad \therefore f(x_0) = y$

$\Rightarrow w = y$

$\Rightarrow y \in Y$

d) como ya demostramos que $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y \quad \forall Y \subseteq F$,

solo tenemos que demostrar que:

$[(\forall Y \subseteq F) \; Y \subseteq f(f^{-1}(Y))] \Leftrightarrow f$ es sobreyectiva

$\Leftarrow)$ P.D.Q $(\forall Y \subseteq F) \; Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$

Sea $y \in Y$, ya que f es sobreyectiva, $(\forall y \in F)(\exists x \in E) \; f(x) = y$

$\Rightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(Y)$ tal que $f(x_0) = y$

$\Rightarrow f(x_0) \in f(f^{-1}(Y))$

$\Leftrightarrow y \in f(f^{-1}(Y))$

$\therefore f$ sobreyectiva $\Rightarrow [(\forall Y \subseteq F) \; Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$

=>| P.D.Q f es sobreyectiva

$\iff (\forall y \in F)(\exists x \in E)$ tal que $f(x) = y$

$\iff f(E) = F$

ya que $(\forall Y \subseteq F)\ f(f^{-1}(Y)) = Y$, en particular

$f(f^{-1}(F)) = F$

$\Rightarrow$ $f(E) = F$ (porque ya que f es función
la preimagen del conjunto de llegada
es todo el conjunto de partida)

$\iff$ f es sobreyectiva

$\therefore \left[(\forall Y \subseteq F)\ f(f^{-1}(Y)) = Y\right] \Rightarrow$ f es sobreyectiva

ya que demostramos (c) y ambas implicancias, podemos concluir que

$[(\forall Y \subseteq F)\ Y = f(f^{-1}(Y)) \iff f$ es sobreyectiva

P2 P.D.Q G inyectiva $\Leftrightarrow$ f sobreyectiva

$\Leftarrow)$ Hipótesis: f sobreyectiva

P.D.Q: G es inyectiva

$\Leftrightarrow (\forall X, Y \in P(B))\ G(X) = G(Y) \Rightarrow X = Y$

Sea $G(X) = G(Y)$

$\Rightarrow f^{-1}(X) = f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow f(f^{-1}(X)) = f(f^{-1}(Y))$

* recordemos la P1) d) de donde $f(f^{-1}(Y)) = Y$ si f es sobreyectiva

$\Rightarrow X = Y$ (pq' f es sobreyectiva).

$\therefore$ f sobre $\Rightarrow$ G iny.

$\Rightarrow)$ Hipótesis: G inyectiva

P.D.Q f es sobreyectiva

$\Leftrightarrow (\forall y \in B)(\exists x \in A)$ tal que $f(x) = y$

Como G es inyectiva, para todo y en B, G({y}) = f^{-1}({y}), distinto de vacío.

Porque G(vacío)=vacío, entonces si G({y})=G(vacío), necesariamente {y}=vacío, que no es cierto

Entonces, para todo y en B, existe un x en f^{-1}({y}) tal que y = f(x).

Por lo tanto, f es sobreyectiva.

Ya que están demostradas ambas implicancias, se concluye que

G inyectiva <=> f sobreyectiva

P3) P. D. Q $(\forall D \subseteq B)\ g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$

Demostraremos la doble inclusión.

$\subseteq$) P. D. Q $g^{-1}(D) \subseteq C \cap f^{-1}(D)$

Sea $x_0 \in g^{-1}(D)$

$\Leftrightarrow x_0 \in C \wedge g(x_0) \in D$

como $x_0 \in C$, $g(x_0) = f(x_0)$

$\Rightarrow x_0 \in C \wedge f(x_0) \in D$

$\Leftrightarrow x_0 \in C \cap f^{-1}(D)$

$\therefore g^{-1}(D) \subseteq C \cap f^{-1}(D)$

$\supseteq$) P.D.Q $C \cap f^{-1}(D) \subseteq g^{-1}(D)$

Sea $\bar{x} \in C \cap f^{-1}(D)$

$\iff \bar{x} \in C \wedge \bar{x} \in f^{-1}(D)$

$\iff \bar{x} \in C \wedge f(\bar{x}) \in D$

Pero como $\bar{x} \in C$, $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$

$\Rightarrow \bar{x} \in C \wedge g(\bar{x}) \in D$

$\iff \bar{x} \in g^{-1}(D)$

$\therefore C \cap f^{-1}(D) \subseteq g^{-1}(D)$.

ya que demostramos ambas inclusiones, podemos concluir que

$(\forall D \subseteq B)\ g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$.