MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto San Martín.
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal
Fecha: Miércoles 22 de agosto del 2018

Auxiliar 15: Complejos y Polinomios

P1. *a*) Encuentre las soluciones de la ecuación

$$w^n = -1, \qquad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

b) Considere los complejos $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = 1$ y $\overline{z} \neq -1$. Use (a) para resolver la ecuación

$$\left(\frac{1+z}{1+\overline{z}}\right)^n = -1, \qquad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

P2. Pruebe que el producto de las n raíces n-ésimas de la unidad es igual a $(-1)^{n-1}$.

P3. *a*) Sea $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por $f(z_1, z_2) = |z_1 + z_2|$. Pruebe que

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : f(z_1, z_2) \cdot f(\overline{z_1}, \overline{z_2}) \leq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

b) Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = |w| = 1$. Pruebe que

$$|z + w| = |z| + |w| \Leftrightarrow z = w.$$

Indicación: Pruebe que $[|z| = 1 \wedge Re(z) = 1] \Leftrightarrow z = 1$.

P4. Considere el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13$. Se sabe que $x_1 = 2 + 3i$ es raíz de P. Se pide encontrar todas las raíces de P y luego factorizarlo en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

P5. Determinar $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio mónico de grado 3, que satisfaga las siguientes condiciones.

- $p(0) = p(2) = 0$
- El resto de dividir $p(x)$ por $(x - 1)$ es el mismo que el resto obtenido al dividir $p(x)$ por $(x - 3)$

P6. Sea $p(x) = 6x^5 - 25x^4 + 16x^3 + 21x^2 - 18x$. Sabiendo que p admite 3 raíces enteras no negativas, factorice p.

P7. *a*) Pruebe que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}_+$.

b) Demuestre que el polinomio

$$p(x) = \sum_{j=1}^{6} \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} \left(\sum_{k=1}^{j} 4k^3 x^{j-1}\right)$$

es igual a

$$36x^5 - 25x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1$$

y decida si $p(x)$ tiene raíces enteras.

P8. Sea $k \in \mathbb{N}$. Se defina la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}[x]$ por

$$(p(x) = a_0 + ... + a_n x^n)\mathcal{R}(q(x) = b_0 + ... + b_m x^m) \Leftrightarrow (a_0 = b_0, ..., a_k = b_k)$$

a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

b) Pruebe que si $p\mathcal{R}q$ y $p^*\mathcal{R}q^*$, entonces $(p \cdot p^*)\mathcal{R}(q \cdot q^*)$.