MA1101-8 Introducción al álgebra
Profesor: Maya Stein
Auxiliar: Juan d'Etigny S.

Auxiliar 2

29 de marzo de 2018

Principio de inducción: Si $n_0 \in \mathbb{N}$ y $P(n)$ es una función proposicional en el conjunto de referencia de los $n \in \mathbb{N}$; $n \geq n_0$, entonces

$$[P(n_0) \wedge (\forall n > n_0, P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge .. \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)] \iff (\forall n \geq n_0, P(n))$$

P1.- Demuestre las siguientes propiedades usando inducción:

a) $(\forall n \geq 1)$, $(3^n + 4^n - 1)$ es divisible por 3.

b) $(\forall n \in \mathbb{N})$, $(4^{2n+1} + 3^{n+2})$ es divisible por 13

P2.- Demuestre por inducción las siguientes desigualdades:

a) $(\forall n \geq 2)$, $n^n \geq 2n!$

b) $(\forall n \geq 1)$, $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

P3.- Se considera la siguiente colección de números reales, definida por:

$$4 = \frac{3}{u_1} = u_1 + \frac{3}{u_2} = u2 + \frac{3}{u_3} = ... = u_n + \frac{3}{u_{n+1}}$$

Demuestre que $\forall n \geq 1$, $u_n = \frac{3(3^n-1)}{3^{n+1}-1}$

P4.- Demostrar que

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

P5.- Propuesto: Recordemos que la secuencia de Fibonacci se define a través de la siguiente recursión:

$$f_1 = 1, \;\; f_2 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; \;\; \forall n \geq 3$$

Demuestre las siguientes propiedades de la sucesión de Fibonacci:

a) Demuestre que para todo par consecutivo de la sucesión de Fibonacci estos solo tienen como divisor común el 1

b) Demuestre que $(\forall n \geq 1),\; f_n < 2^n$

c) Demuestre que $(\forall n \geq 6),\; f_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

d) Pruebe que $(\forall n \geq 1),\; f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_n f_{n+1}$

e) Demuestre la identidad de Cassini, es decir, $(\forall n \geq 2),\;\; f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$

P6.- Propuesto: Demuestre por inducción lo siguiente:

- $(\forall n \in \mathbb{N}),\; (5^{2n+1} + 7^{2n+1})$ es divisible por 6.
- $(\forall n \in \mathbb{N}),\; (x - y)$ divide a $(x^n - y^n)$

P7.- Propuesto: Pruebe que $\forall n \geq 3$, se tiene que $(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

P8.- Propuesto: Pruebe que $(\forall n \geq 1),\;\; 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$