P4) tenemos la función $\delta_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{〃} \end{cases}$

a) Primero nos interesa ver $\delta_E(x)$.

Recordamos que E al ser cjto. de referencia

$\Rightarrow$ todo $x \in E$ $\Rightarrow$ todo x cumple $\delta_E(x) = 1$

es decir $\delta_E(x)$ es la función constante $= 1$.

Así mismo como ningún x pertenece a $\emptyset$

$\Rightarrow \forall x \in E,\ \delta_\emptyset(x) = 0$

b) PDQ: $\forall x \in E,\ \delta_{A \cap B}(x) = \delta_A(x) \cdot \delta_B(x)$

Vemos que $x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$

$$\begin{array}{ccc} x \in A \cap B & \iff & x \in A \wedge x \in B \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \delta_{A \cap B}(x) = 1 & & \delta_A(x) = 1 \wedge \delta_B(x) = 1 \end{array}$$

Luego $\delta_{A \cap B}(x) = 1 \Rightarrow \delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = 1 \cdot 1 = 1$

Además $\delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = 1 \Rightarrow \delta_A(x) = 1 \wedge \delta_B(x) = 1$,

pues de lo contrario si $\delta_A(x) \neq 1 \vee \delta_B(x) \neq 1$

$\Rightarrow \delta_A(x) = 0 \vee \delta_B(x) = 0$ por la definición de función característica

Lo que nos daría $\delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = 0 \neq 1$

Entonces $\delta_A(x) \cdot \delta_B(x) \Rightarrow \delta_A(x) = 1 \wedge \delta_B(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \delta_{A \cap B}(x) = 1$$

$\therefore \delta_{A\cap B}(x) = 1 \Leftrightarrow \delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = 1$

Esto si lo vemos negado diría

$[\delta_{A\cap B}(x) \neq 1 \Leftrightarrow \delta_A(x) \cdot \delta_B(x) \neq 1]$

Por qué?

$\Leftrightarrow [\delta_{A\cap B}(x) = 0 \Leftrightarrow \delta_A(x) \cdot \delta_B(x) = 0]$

$\therefore \forall x \in E, \ \delta_{A\cap B}(x) = \delta_A(x) \cdot \delta_B(x)$ //

c) PDQ: $C \subseteq D \Leftrightarrow \forall x \in E, \ \delta_C(x) \leq \delta_D(x)$

$\Rightarrow$] Para ver que $\delta_C(x) \leq \delta_D(x)$, basta ver que $\forall x \in E$; $\delta_C(x) = 1 \Rightarrow \delta_D(x) = 1$ (Es decir, ver que nunca pasa que $\delta_C(x) = 1 \wedge \delta_D(x) = 0$).

Pero $\underset{\substack{\| \\ 1}}{\delta_C(x)} \Leftrightarrow x \in C \underset{(C \subseteq D)}{\Rightarrow} x \in D \Leftrightarrow \underset{\substack{\| \\ 1}}{\delta_D(x)}$, y concluimos

$\Leftarrow$] Se procede de la misma forma:

$$[\delta_C(x) \leq \delta_D(x)] \Rightarrow [\forall x \in E;\ \delta_C(x) = 1 \Rightarrow \delta_D(x) = 1]$$

Pero $\delta_C(x) = 1 \Leftrightarrow x \in C \quad \wedge \ \delta_D(x) = 1 \Leftrightarrow x \in D$

Luego $\delta_C(x) \leq \delta_D(x) \Rightarrow \forall x \in E;\ x \in C \Rightarrow x \in D$

$$\Leftrightarrow C \subseteq D_{\,//}$$

Nota: Las funciones de este tipo aunque no parezcan muy importantes, ven uso extensivo en problemas de optimización, probabilidades, entre otros.