**MA1101-8 Introducción al álgebra**
**Profesor:** Maya Stein
**Auxiliar:** Juan d'Etigny S.

# Auxiliar 5

23 de abril de 2018

Para una función $f : A \to B$

- $f$ se dirá inyectiva ssi $[\,\forall x_1, x_2 \in A;\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\,]$
- $f$ se dirá sobreyectiva ssi $[\,\forall y \in B, \exists x \in A;\ y = f(x)\,]$
- $f$ se dirá biyectiva si es tanto inyectiva como sobreyectiva
- $f$ biyectiva $\Rightarrow\ \exists f^{-1};\ \forall x \in A,\ \forall y \in B,\ \ f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$

**P1.-** Sea $E$ un conjunto de referencia y $A, B \subseteq E$. Se define la función

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(E) \\ X &\mapsto f(X) = A \cap (B \cup X) \end{aligned}$$

*a*) Pruebe que $f \circ f = f$

*b*) Demuestre que $(A \neq E \vee B \neq \emptyset) \Rightarrow f$ no es inyectiva

*c*) Demuestre que $A \neq E \Rightarrow f$ no es sobreyectiva

**P2.-** Sea $\mathcal{F} = \{(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})\,|(\exists a \in \mathbb{R}),\ (\forall x \in \mathbb{R}),\ f = ax^2\}$. Se define la función

$$\begin{aligned} \varphi :\ \ \mathcal{F} &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \varphi(f) = f(2) \end{aligned}$$

Demuestre que $\varphi$ es una función biyectiva

**P3.-** Sean $A, B$ y $C$ tres conjuntos no vacíos. Sean además $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to A$ funciones tales que:

- $h \circ g \circ f$ es inyectiva
- $f \circ h \circ g$ es inyectiva
- $g \circ f \circ h$ es sobreyectiva

Demuestre que $f, g$ y $h$ son biyectivas.

**P4.- Propuesto:** Sea $\mathcal{U}$ un conjunto y $f : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ la función que a todo conjunto $X \subseteq \mathcal{U}$ asigna $f(X) = \mathcal{U} \setminus X$. Estudie la inyectividad y sobreyectivdad de esta función. En el caso de que f sea biyectiva, encuentre su inversa.

**P5.- Propuesto:** Sean $A, B$ y $C$ conjuntos no vacíos. Considere las funciones $f : A \to B$ y $q : B \to C$. Demuestre que:

*a*) $[\ f \circ g$ sobreyectiva $\wedge f$ biyectiva $] \Rightarrow g$ sobreyectiva

*b*) $[\ f \circ g$ inyectiva $\wedge g$ biyectiva $] \Rightarrow f$ inyectiva

*c*) Si $f \circ g$ es biyectiva, y una de las dos funciones es biyectiva, la otra también lo es

**P6.- Propuesto:** (*Control 2, 2009*) Sea $\mathcal{F} = \{f : [0,1] \to [0,1] / \ f$ función$\}$ y $\mathcal{B} = \{f : [0,1] \to [0,1] / \ f$ función biyectiva$\}$. Se definen así las funciones $\Phi : \mathcal{F} \to [0,1]$ y $\Psi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ dadas por:

$$\Phi(f) = \frac{f(0) + f(1)}{2}, \quad \Psi(f) = f^{-1}$$

*a*) Demuestre que $\Phi$ está bien definida, es decir, verifique que $(\forall f \in \mathcal{F})$, $\Phi(f) \in [0,1]$

*b*) Estudie inyectividad y sobreyectividad de $\Phi$

*c*) Demuestre que $\Psi(f \circ g) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$

*d*) Pruebe que $\Psi$ es biyectiva

*e*) Pruebe que $(\Phi \circ \Psi)^{-1}(\{0\}) = \emptyset$