P1)

a) Prube que $\bar{x} \in A' \iff \exists (x_n)_n \subseteq A \setminus \{\bar{x}\} : x_n \to \bar{x}$.

Sol:

$\Rightarrow$) La def. de A', es básicamente que

$\bar{x} \in A' \iff \forall \varepsilon > 0,\ A \cap (B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}) \neq \phi$.

Así, si tomamos esta expresión $\forall n \in \mathbb{N}$, con $\varepsilon_n \doteq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ A \cap (B(\bar{x}, \frac{1}{n}) \setminus \{\bar{x}\}) \neq \phi$

$\iff \underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in A \cap (B(\bar{x}, \frac{1}{n}) \setminus \{\bar{x}\})}$

[Estamos construyendo una sucesión.].

Probemos que efectivamente, $x_n \to \bar{x}$:

Notemos que $\|x_n - \bar{x}\| < \frac{1}{n}$, pues $x_n \in B(\bar{x}, \frac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow \|x_n - \bar{x}\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \iff x_n \to \bar{x}$. //

$\Leftarrow$) ~~Sabemos~~: Queremos ver que $A \cap (B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}) \neq \phi$.

Por hipótesis, $\exists (x_n)_n \subseteq A \setminus \{\bar{x}\}$ tq' $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \bar{x}$

$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq' $\forall n \geq N_0,\ \|x_n - \bar{x}\| < \varepsilon$

~~$\iff \forall \varepsilon > 0$~~

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq' $\|x_{N_0} - \bar{x}\| < \varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_{N_0}$ tq' $x_{N_0} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$.

Pero por hipótesis, $(x_n)_n \subseteq A\setminus\{\bar{x}\}$

$\Rightarrow \cancel{x_{N_0} \in B(\bar{x},\varepsilon)}$

$\Rightarrow x_{N_0} \in A\setminus\{\bar{x}\}$

$\Rightarrow x_{N_0} \in B(\bar{x},\varepsilon) \cap (A\setminus\{\bar{x}\})$

$\Rightarrow B(\bar{x},\varepsilon)\cap(A\setminus\{\bar{x}\}) \neq \phi \ , \forall \varepsilon > 0$

$\Leftrightarrow A \cap (B(\bar{x},\varepsilon)\setminus\{\bar{x}\}) \neq \phi , \ \forall\varepsilon>0$ ∎

b) Pruebe que $\bar{A} = A \cup A'$

Sol: $\supseteq$] Claramente $A \subseteq \bar{A}$, y por otro lado, si $\bar{x}\in A'$, entonces $\exists (x_n)_n \subseteq A\setminus\{\bar{x}\}$ tq' $x_n \to \bar{x}$ $\Leftrightarrow \bar{x} \in A'$.

$\Rightarrow \exists (x_n)_n \subseteq A$ tq' $x_n \to \bar{x}$

$\subseteq$] Sea $\bar{x}\in\bar{A}$.

- Si $\bar{x}\in A$, estamos listos.
- Si $\bar{x}\notin A$: Pdq: $\bar{x}\in A'$.

La def. de clausura es:

$$\bar{A} = \{x\in E \mid \forall\varepsilon>0, \ B(x,\varepsilon)\cap A \neq \phi\}$$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \ B(\bar{x},\varepsilon)\cap A \neq\phi$

$\overset{\bar{x}\notin A}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon>0 \ B(\bar{x},\varepsilon)\cap(A\setminus\{\bar{x}\})\neq\phi$

$\Leftrightarrow \bar{x}\in A'$. ∎

~~Pauta Auxiliar #4~~

P1) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x,y) \doteq \begin{cases} \left(\dfrac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2}, \dfrac{x(\cos(y)-1)}{x^2+y^2} \right) & , (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad de f, notemos que para $(x,y) \neq (0,0)$, ella es continua por álgebra y composición de continuas.

Ahora, estudiemos en $(0,0)$: recordemos la clase que f es continua en $(0,0)$, si y sólo si

$$\forall (x_n, y_n) \to (0,0),\ f(x_n, y_n) \to f(0,0) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall (x_n) \to 0, & \left(\dfrac{|x_n y_n|^\alpha}{x_n^2 - x_n y_n + y_n^2} \right) \longrightarrow 0 \ ; \ y \\ \forall (y_n) \to 0, & \dfrac{x_n(\cos(y_n)-1)}{x_n^2 + y_n^2} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

gracias a que la convergencia en $\mathbb{R}^2$ equivale a la convergencia por coordenadas.

Por otra parte, notemos que la 2^a coordenada se va a 0 cuando $x_n \to 0$ y $y_n \to 0$ (lo hicimos en la aux #1).

El "problema" estaría en la 1^a coordenada, ya que ahí está α.

Lo que haremos primero, será probar con la suc. $(\hat{x}_n, \hat{y}_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ cómo se comporta el límite, según α:

$$L_n = \frac{|\hat{x}_n \hat{y}_n|^\alpha}{\hat{x}_n^2 - \hat{x}_n \hat{y}_n + \hat{y}_n^2} = \frac{|\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}|^\alpha}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{1/n^{2\alpha}}{1/n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^{2(\alpha-1)}$$

- Si $\alpha = 1$, tenemos que $L_n \to 1$
  $\Rightarrow f(\hat{x}_n, \hat{y}_n) \to (1,0) \neq f(0,0)$
  $\Rightarrow$ f no es continua
- Si $\alpha < 1$, $L_n \to +\infty$
  $\Rightarrow f(\hat{x}_n, \hat{y}_n)$ diverge $\Rightarrow$ f no es continua
- Si $\alpha > 1$, $L_n \to 0$
  $\Rightarrow f(\hat{x}_n, \hat{y}_n) \to (0,0) = f(0,0)$

Eso sí, a partir de esto último no podemos concluir que f es continua, ya que tomamos una sucesión específica; esto lo hicimos para descartar el caso $\alpha \leq 1$ y darnos una intuición.

Probemos entonces que f es continua si $\alpha > 1$:

2

Sean $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ arbitrarias.

Pdq: $$\frac{|x_n y_n|^\alpha}{x_n^2 - x_n y_n + y_n^2} \longrightarrow 0$$

En efecto, notemos que:

$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - xy + y^2 \geq xy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 - xy + y^2} \leq \frac{1}{xy} \leq \left|\frac{1}{xy}\right| = \frac{1}{|xy|}$$

Luego, aplicándolo en el límite:

$$\Rightarrow 0 \overset{(*)}{\leq} \frac{|x_n y_n|^\alpha}{x_n^2 - x_n y_n + y_n^2} \leq \frac{|x_n y_n|^\alpha}{|x_n y_n|} = |x_n y_n|^{\alpha - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Notemos que la convergencia se tiene pues $(\cdot)^{\alpha-1}$ es continua, por lo que $(x_n y_n)^{\alpha-1} \to (0 \cdot 0)^{\alpha-1} = 0$, cosa que a su vez se da porque $\alpha > 1$.

$$\therefore f(x_n, y_n) \to f(0,0)$$

y se concluye que si $\alpha > 1$, f es continua en todo $\mathbb{R}^2$. ■

(*) Nótese que siempre $x_n^2 - x_n y_n + y_n^2 \geq 0$; en efecto,

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (x-y)^2 \geq 0 \\ \bullet\ (x+y)^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 \geq 2xy \\ x^2 + y^2 \geq -2xy \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2|xy|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - xy \geq 2|xy| - xy \geq |xy| \geq 0$$

~~También queda propuesto~~

P2|

a) Pruebe que A es abierto, con
$$A \doteq \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z > x^2+y^2 > 1\}$$

Sol: En efecto, notamos que
$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z > x^2+y^2 \wedge x^2+y^2>1\}$$
$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0 > x^2+y^2-z \wedge x^2+y^2>1\}$$
$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0 > x^2+y^2-z\} \cap \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2>1\}$$

Definimos $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\phi(x,y,z)=x^2+y^2-z$; y $\Psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\Psi(x,y,z)=x^2+y^2$.

Está más claro que el agua que ϕ y Ψ son continuas. Avancemos un poco más:

$\Rightarrow$ ~~$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \phi^{-1}((-\infty,0))\} \cap \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$~~

$$\Rightarrow A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \phi(x,y,z)<0\} \cap \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \Psi(x,y,z)>1\}$$
$$= \phi^{-1}((-\infty,0)) \cap \Psi^{-1}((1,+\infty))$$

Como $(-\infty,0)$ y $(1,+\infty)$ son abiertos; y tanto ϕ como Ψ son continuas, entonces $\phi^{-1}((-\infty,0))$ y $\Psi^{-1}((1,+\infty))$ son abiertos

[$f:E\to F$ LSSE:
a) f es continua
b) $\forall\, \mathcal{U}\subseteq F$ abierto, $f^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto
c) $\forall\, K\subseteq F$ cerrado, $f^{-1}(K)$ es cerrado]

Y finalmente, como intersección finita de abiertos es abierto, entonces A es abierto. //

b) Usaremos el mismo esquema que en (a), pero para cerradura:

$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-y)^2 \geq (xy-1)xy\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-2xy+y^2 \geq x^2y^2-xy\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-xy+y^2 \geq x^2y^2\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \geq \frac{x^2y^2}{x^2-xy+y^2}\}$$ ¡es f de la
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \geq f(x,y)\}$$ P1!
$$= f^{-1}((-\infty,1])$$

Como f es continua y $(-\infty,1]$ es cerrado (ya que $(1,+\infty)=(-\infty,1]^c$ es abierto), entonces B es cerrado. //

$\blacksquare$

b) Sea $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(K)$ tq $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. Probemos que $f \in \mathcal{C}(K)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in K$.

Pdq: $\exists \delta > 0 : y \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(y) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$

Nótese que (sea $y \in \mathbb{R}^n$ por fijar y $n \in \mathbb{N}$ por fijar)

$$|f(x_0) - f(y)| = |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)|$$

$$\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

$$\leq \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x_0) - f_n(y)| + \|f_n - f\|_\infty$$

$$= 2\|f - f_n\|_\infty + |f_n(x_0) - f_n(y)|$$

Pero, como $f \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f_n$, podemos elegir n sufic. grande tal que $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/4$.

Una vez fijo ese n, ya que f_n es continua, entonces $\exists \delta > 0 : y \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f_n(y) \in (f_n(x_0) - \varepsilon/2, f_n(x_0) + \varepsilon/2)$

$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : y \in B(x_0, \delta) \Rightarrow |f_n(x_0) - f_n(y)| < \varepsilon/2$

Luego, tomando ese δ, obtenemos que

$$y \in B(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y $\therefore$ f es continua. $\blacksquare$

⊛ Es evidente que $L^\infty(K)$ es Banach; es análogo a la parte (a).

c) Finalmente, como $(L^\infty(K), \|\cdot\|_\infty)$ es Banach y $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ es s.e.v. cerrado dentro de $L^\infty(K)$ (y con la misma norma), éste es Banach. $\blacksquare$

⊛ Corrección: en vez de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, debe decir $\mathcal{C}(K)$, con $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto.

10